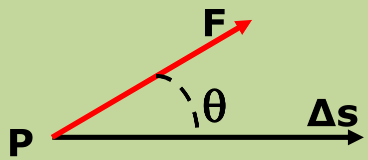
Lavoro ed Energia

(*esercizi*)

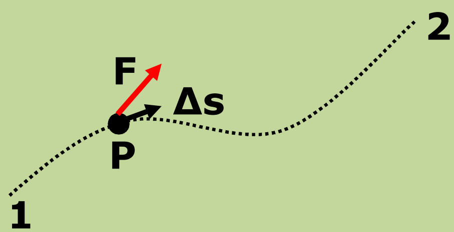
Lavoro meccanico

Se applico al punto **P** una forza **F** e il punto si sposta di quantità pari a **Δs** allora **la forza ha compiuto un lavoro** pari a



$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \Delta s \cos\theta} \quad [joule]$$

Se **F** e **Δs** sono tra loro ortogonali allora **la forza ha compiuto un lavoro nullo.**

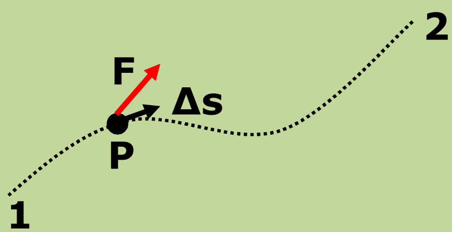


Se la forza **F** appartiene ad un **campo di forze conservativo** (*come il* ***campo gravitazionale***) allora il **lavoro che compie non dipende dal percorso seguito per andare dal punto 1 al punto 2**.
E si ha anche che

$$\boxed{L_{12} = -L_{21}}$$

Energia Potenziale

Per quanto detto sui **Campi Conservativi** è allora possibile definire una **funzione SCALARE** definita **in tutti i punti** del **campo di forze** grazie alla quale si ha che



$$\boxed{L_{12} = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) = U_1 - U_2}$$

Si ricordi che nel caso del **campo gravitazionale**, se **y** è la quota rispetto alla superficie terrestre, si ha

$$\boxed{U(y) = -mgy}$$

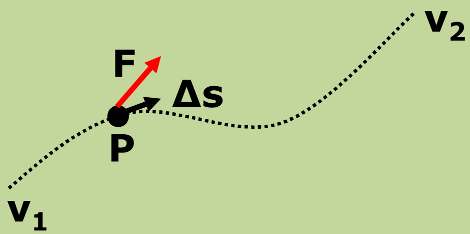
Per cui se sollevo un corpo di massa **m** dalla quota $\mathbf{y_1}$ alla quota $\mathbf{y_2}$ compio un lavoro pari a

$$\boxed{L_{12} = U_1 - U_2 = -mgy_1 - (-mgy_2) = mg\Delta y}$$

Lavoro ed Energia Cinetica

Per un corpo di massa **m**, **non in rotazione**, che si muove con velocità **v** viene definita la sua **energia cinetica** come

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$



Se applicando la forza **F** al nostro corpo lo sposto tra i punti **1** e **2** e conosco le velocità $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ rispettivamente, vale **il teorema delle forze vive** per cui

$$\boxed{L_{12} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2}$$

Conservazione dell'Energia

Si ricorda anche che nel caso di **campi di forze conservativi** vale la **legge di conservazione dell'energia**, quindi in tale caso

$$\boxed{E = U + T = \text{costante}}$$

Nel caso in cui intervengano anche **forze non conservative** (**gli attriti**) allora si ha

$$\boxed{L_{NC} + L_C = T_2 - T_1}$$

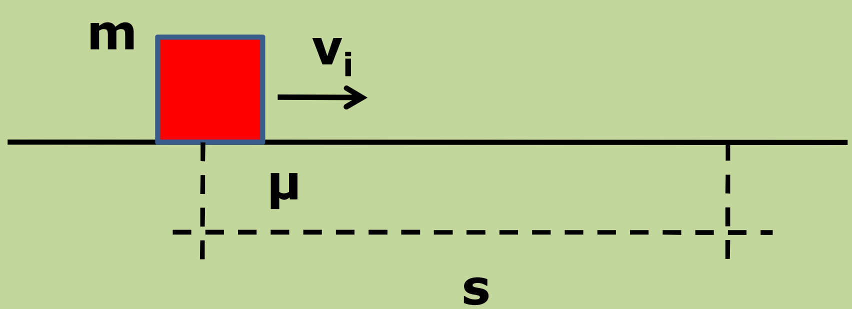
Ma ricordando che $L_C = U_1 - U_2$ e sostituendo si ha

$$\boxed{L_{NC} = (U_2 - U_1) + (T_2 - T_1) = (U_2 + T_2) - (U_1 + T_1) = E_2 - E_1}$$

Esercizio n°1

Un corpo di massa **m=10kg** si muove su un **piano orizzontale scabro** con **velocità iniziale** pari a **5m/sec**. Sapendo che il **coefficiente di attrito dinamico** vale **0.2** quanto **spazio** percorrerà prima di fermarsi?

Schematizziamo il problema:



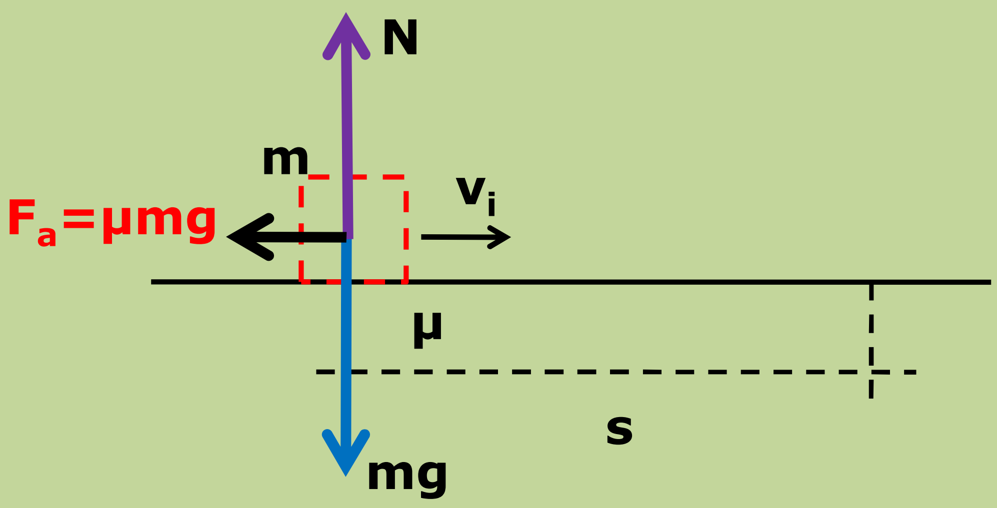
Il corpo è **inizialmente in moto** (**energia cinetica**) con velocità $\mathbf{v_i}$, poi sotto l'azione dell'**attrito** (**non conservativo**) **si ferma** dopo aver percorso uno spazio **s**.

Esercizio n°1

In tale caso, essendo in presenza di forze non conservative, conviene usare la seguente espressione

$$\boxed{L_{NC} = E_2 - E_1}$$

Ma qual è il lavoro dovuto alla forza non conservativa?



È evidente che sarà

$$\boxed{L_{NC} = F_a s = -\mu mgs}$$

ed anche

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= T_1 \\ E_2 &= 0 \end{aligned}}$$

Esercizio n°1

Quindi tutta l'energia, che è solo cinetica, è dissipata in calore (attrito) e posso scrivere

$$\boxed{L_{NC} = E_2 - E_1} \Rightarrow \boxed{-\mu mgs = -\frac{1}{2}mv_i^2}$$

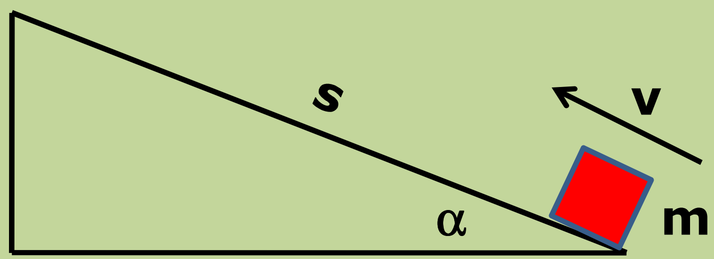
Da cui si ha

$$\boxed{s = \frac{v_i^2}{2\mu g} = \frac{(5)^2}{2(0.2)(9.8)} = 6.37m}$$

Esercizio n°2

Alla base di un **piano inclinato privo di attrito** è posto un oggetto di massa **m=1kg**. Sapendo che l'angolo di inclinazione è α**=30**° e che il piano inclinato è lungo **1m** quale velocità deve essere impressa al corpo **perché si fermi in cima**, senza cadere.

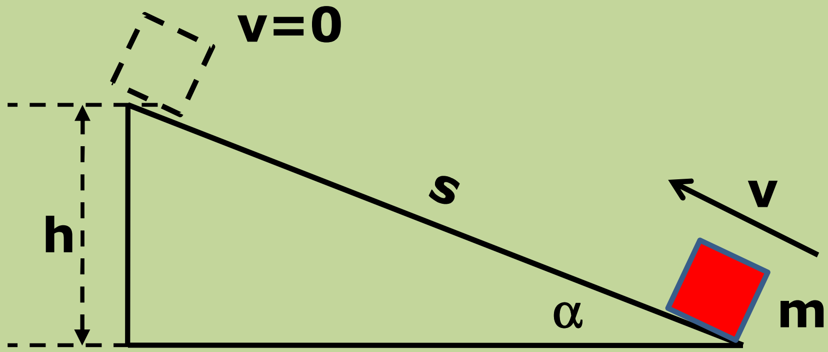
Schematizziamo il problema



Ora l'oggetto si muove in un **campo di forze conservativo**. Infatti è soggetto al solo campo gravitazionale. Inoltre a tale corpo viene impressa **energia cinetica**. **Ma in cima al piano tale energia cinetica non c'è più!**

Esercizio n°2

Questo è un caso classico di applicazione della conservazione dell'energia nei campi conservativi.



Infatti nel punto iniziale si ha solo energia cinetica

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

Nel punto finale l'energia cinetica è nulla ed il corpo possiede solo energia potenziale

$$\boxed{U = mgh = mgs\sin\alpha}$$

Esercizio n°2

Per la conservazione dell'energia deve essere $\boxed{U = T}$

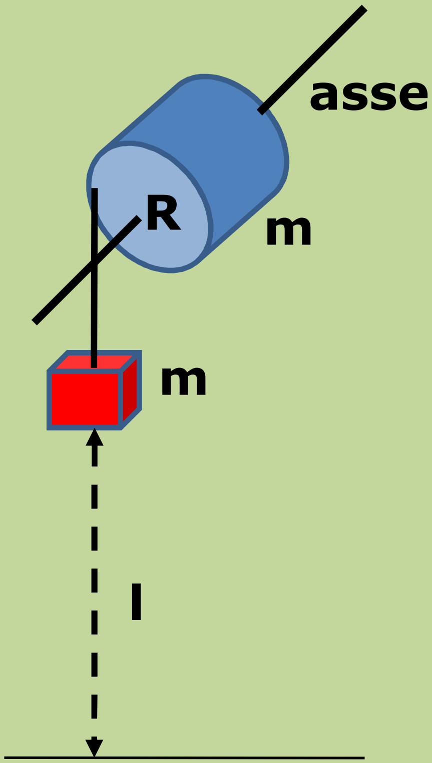
e quindi

$$\boxed{mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2}$$

da cui consegue

$$\boxed{v = \sqrt{2gs\sin\alpha} = \sqrt{2(9.8)(1)\sin 30°} = 3.13\,m/\sec}$$

Esercizio n°3



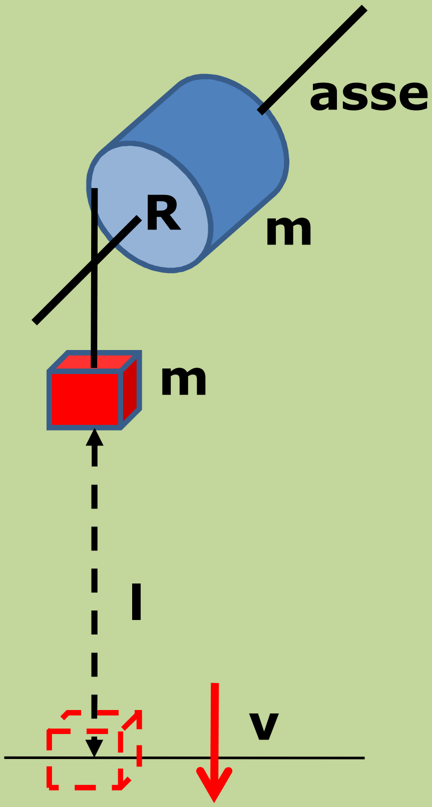
Un corpo di massa **m** è appeso a distanza **l=2m** dal suolo con una fune priva di peso ed inestensibile. La fune è lunga **l** ed è arrotolata intorno ad un cilindro di raggio **R=50cm** e massa **m**. Il cilindro è libero di ruotare senza attrito intorno al proprio asse. Si libera la massa che cade al suolo. Quale sarà in quel momento la **velocità angolare del cilindro**?

Analisi del problema:

Tutto avviene in un campo di forze conservativo, quindi deve valere la legge di conservazione dell'energia meccanica. Pertanto

$$\boxed{E = U + T = \text{costante}}$$

Esercizio n°3



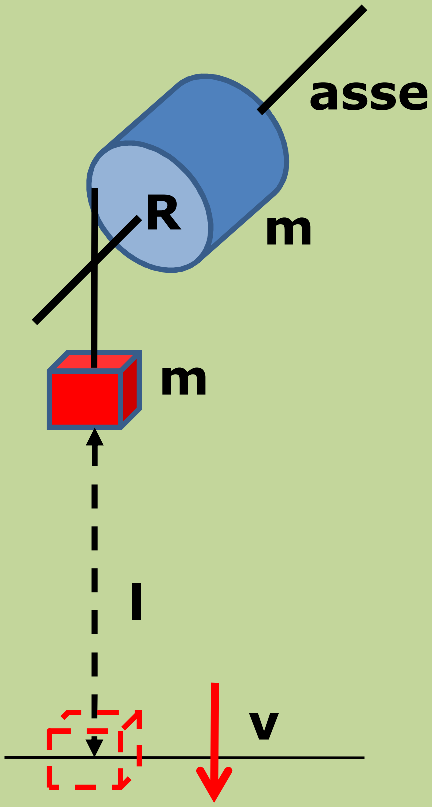
La massa **m** subisce nella caduta una variazione di **energia potenziale** esprimibile come

$$\boxed{\Delta U = mgl}$$

La stessa massa, al momento del contatto con il suolo, avrà una velocità **v** e pertanto avrà **energia cinetica** pari a

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

Esercizio n°3



La corda, ovviamente, si srotolerà ed il cilindro sarà posto in rotazione. Anch'esso possiederà **energia cinetica ma di tipo rotazionale**. Si potrà scrivere

$$\boxed{T_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Ricorda la corrispondenza tra moti rotatori e moti traslatori:

$$\boxed{v} \Rightarrow \boxed{\omega}$$

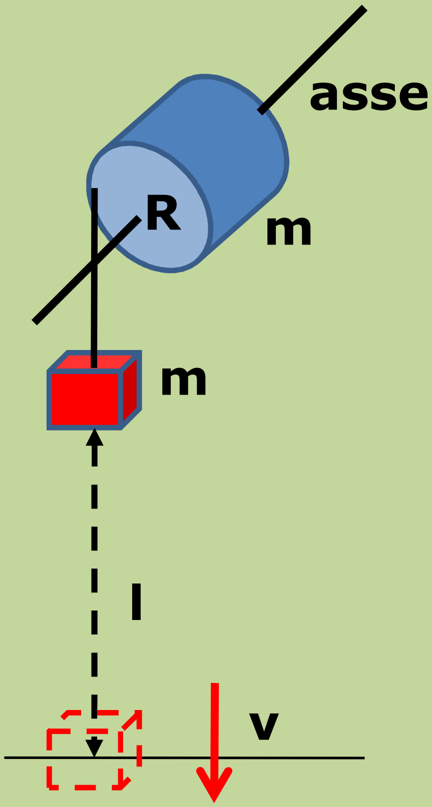
$$\boxed{m} \Rightarrow \boxed{I}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2}$$

Dove I è il momento di inerzia che dipende dalla geometria del corpo, dalla densità e dall'asse di rotazione. Nel caso in esame

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m R^2}$$

Esercizio n°3



A questo punto, ricordando il legame tra velocità angolare e velocità tangenziale, si può scrivere

$$\boxed{v = \omega R}$$

E per la conservazione dell'energia

$$\boxed{mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

ovvero

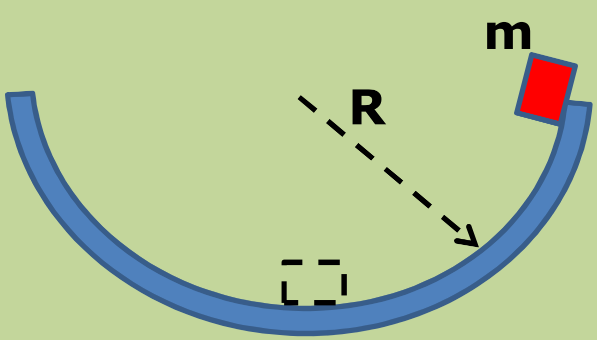
$$\boxed{mgl = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2}$$

da cui

$$\boxed{gl = \frac{3}{4}R^2\omega^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{gl}{3}} = 10.22\, {}^{rad}\!/_{sec}}$$

Esercizio n°4

Un carrello di massa m=**100kg** è posto sulla sommità di una rotaia a struttura semicircolare di raggio **R=20m**. Se lasciato scendere lungo la rotaia esso si muove senza attrito. Si vuole sapere la **reazione** della rotaia quando il carrello giunge in fondo alla struttura.



Perché porci il problema proprio in fondo alla struttura?

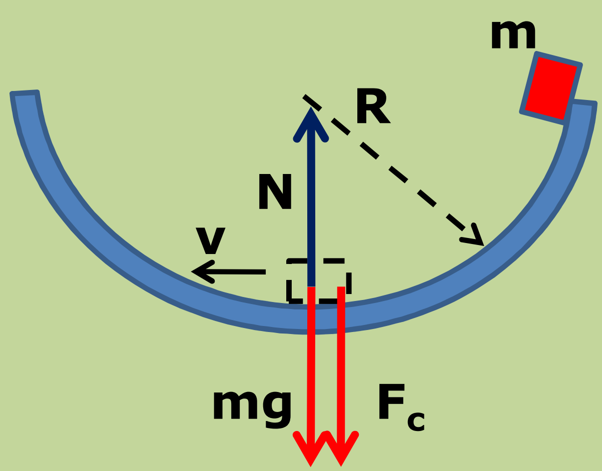
Non dobbiamo dimenticare che il corpo si muoverà lungo una traiettoria circolare e quindi sarà soggetto alla **forza centrifuga**.

Tale forza è esprimibile come

$$\boxed{F_c = m\frac{v^2}{R}}$$

Esercizio n°4

Quindi in fondo alla struttura la situazione della forze è quella indicata di seguito:



Quindi dovrà essere

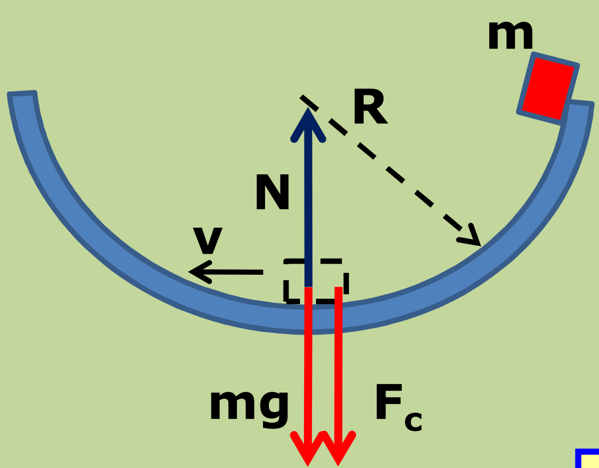
$$\boxed{N = mg + F_c}$$

Per determinare la componente centrifuga è necessario conoscere la velocità del carrello in fondo alla struttura.
Ciò può essere calcolato ricordando che siamo in un campo conservativo, pertanto

$$\boxed{\Delta U = \Delta T}$$

Esercizio n°4

Nel caso in esame si potrà scrivere



$$\boxed{mgR = \frac{1}{2}mv^2}$$

e quindi

$$\boxed{v = \sqrt{2gR}}$$

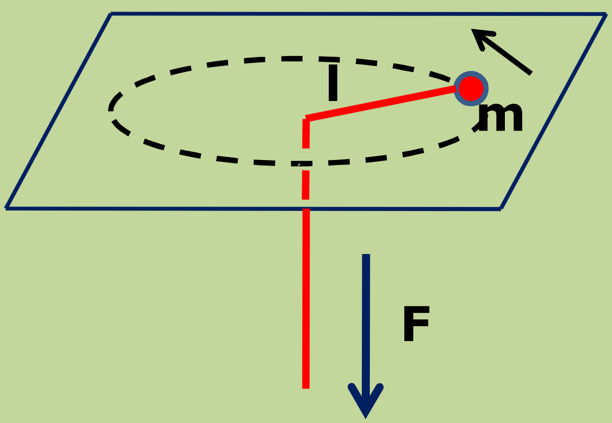
Sostituendo il tutto

$$\boxed{N = mg + m\frac{2gR}{R} = 3mg = 2940\mathrm{Newton}}$$

È la reazione ad un corpo che, da fermo, ha una massa tre volte più grande!

Esercizio n°5

Una pallina di massa **m=100g** sta girando, **con moto circolare uniforme**, legata ad una cordicella priva di peso, inestensibile e lunga **l=50cm**. La velocità angolare risulta essere **ω=1rad/sec**. Si supponga di tirare la cordicella dal centro fino a **ridurne la lunghezza a l/4**. Quale **lavoro** si compie per fare ciò?



È chiaro che applico una forza per tirare la cordicella; tale forza **non è conservativa**.

Inoltre la pallina rimarrà a ruotare su uno stesso piano, quindi **non c'è variazione di energia potenziale**.

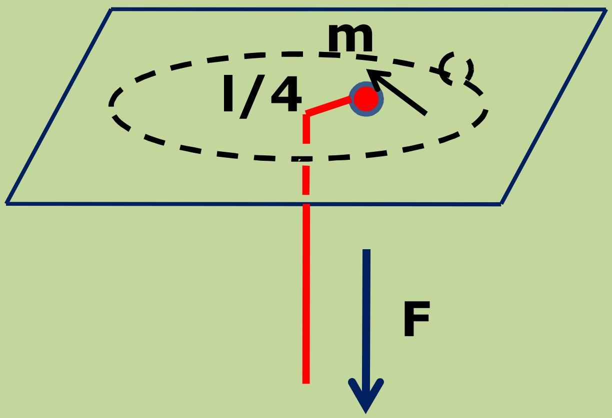
Pertanto il lavoro compiuto dalla forza deve essere legato ad **una variazione di energia cinetica!**

$$\boxed{L = T_2 - T_1}$$

Esercizio n°5

Ora il moto è circolare, quindi **l'energia cinetica** è esprimibile come

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2}$$



E, nel caso in esame, il **momento di inerzia** di una pallina che gira lungo una circonferenza di raggio **r** è esprimibile come

$$\boxed{I = mr^2}$$

Quindi si modifica il valore del momento di inerzia perché **cambia il raggio di rotazione!**

Ma come posso legare tutto ciò alla conseguente variazione di velocità? Devo ricordare che in **fisica** esistono delle importanti **leggi di conservazione** …

Esercizio n°5

Ricordiamo le leggi di conservazione

La conservazione dell'energia → $E = U + T = \text{costante}$

La conservazione della quantità di moto → $p = mv = \text{costante}$

Da applicare, ad esempio, nell'analisi dei **processi d'urto** e comunque valida se il sistema è **isolato!** (*non dove scambiare forze con l'esterno*)

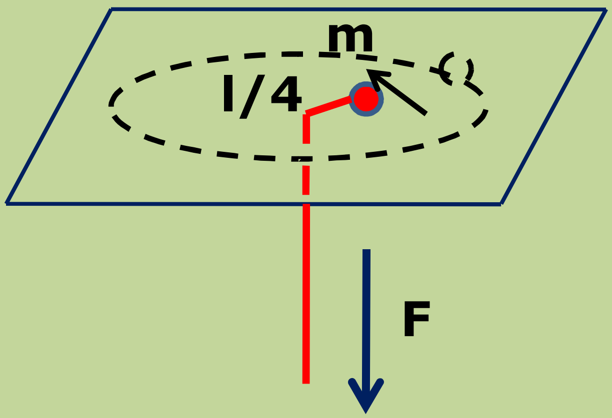
La conservazione del momento angolare → $b = I\omega = \text{costante}$

Quest'ultima si applica proprio nei **moti rotazionali** ed è molto utile al nostro caso. **Quindi nelle due posizioni della cordicella sarà conservato il momento angolare!**

Esercizio n°5

Quindi, per la conservazione del momento angolare, si scrive

$$\boxed{I_0\omega_0 = I_f\omega_f}$$



con

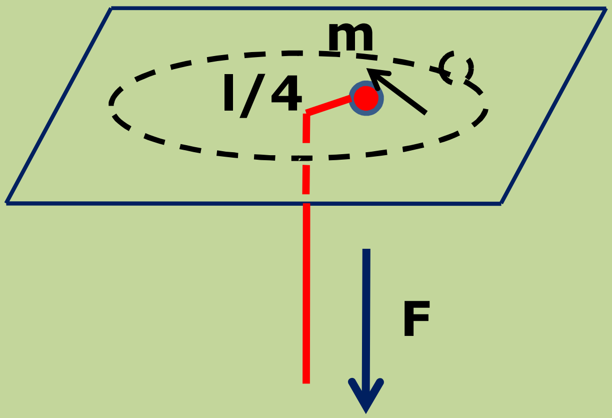
$$\boxed{I_0 = ml^2 \qquad \text{e} \qquad I_f = m\left(\frac{l}{4}\right)^2}$$

Sostituendo e semplificando …

$$\boxed{ml^2\omega_0 = m\left(\frac{l}{4}\right)^2\omega_f} \Rightarrow \boxed{\omega_f = 16\omega_0}$$

Esercizio n°5

Ora, applicando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, si ha



$$L = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

Sostituendo e semplificando …

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{l}{4} \right)^2 (16\omega_0)^2 - \frac{1}{2} m l^2 \omega_0^2 = \frac{15}{2} m l^2 \omega_0^2 =$$
$$\frac{15}{2} 0.1 (0.5)^2 1^2 = 0.1875 \, \text{joule}$$