Corso di Fisica Generale

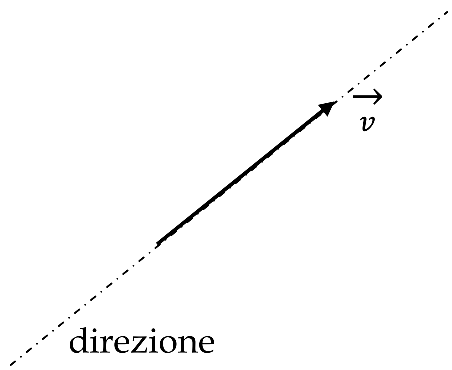
Esercitazioni

A cura di B. Preite

1. Richiami sui vettori

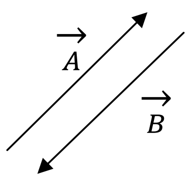
Def.: *Un vettore è una classe di segmenti orientati equipollenti.*

Un vettore caratterizza delle grandezze fisiche identificabili non solo con una "MISURA", ma anche con una direzione ed un verso.



$|\vec{v}|$ = modulo o lunghezza del vettore

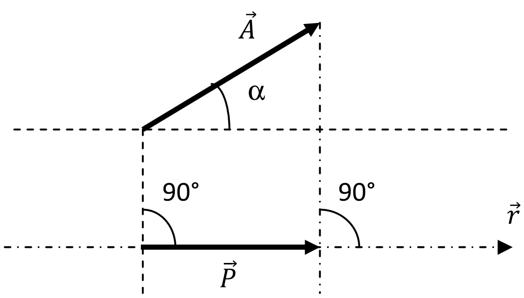
Alcune proprietà vettoriali:



se $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ allora $\vec{B} = -\vec{A}$.

- Proprietà di commutatività della somma: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Associatività della somma: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
- Commutatività del prodotto per uno scalare: $m\vec{A} = \vec{A}m$
- Non commutatività del prodotto vettoriale: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

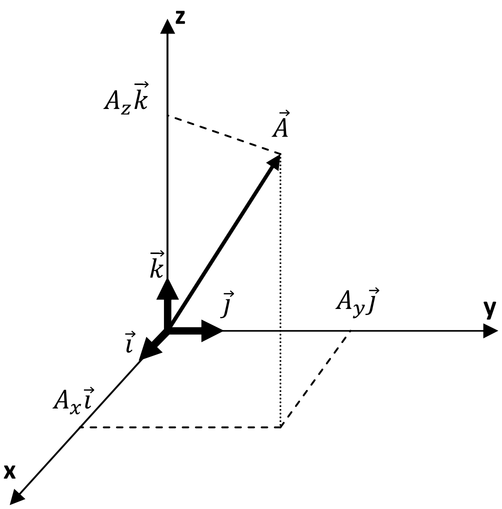
La componente di un vettore, ovvero la proiezione ortogonale di un vettore su una retta:



$\vec{P}$ è la componente di $\vec{A}$ lungo $\vec{r}$ e quindi si può scrivere

$$\vec{P} = |\vec{A}| \cos(\alpha) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Rappresentazione cartesiana dei vettori:



$\vec{A} = (A_x\vec{\imath} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$ dove A_x, A_y e A_z sono le componenti del vettore lungo i tre assi ovvero le coordinate di $\vec{A}$.

Ovviamente si avrà $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

Prodotto scalare:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\alpha)$ dove α è l'angolo tra i vettori;

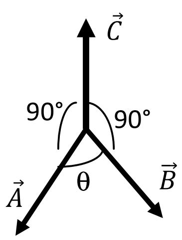
se conosco le coordinate $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ allora ho $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

Ricordare che:

$$\begin{cases} \vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{\imath} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0 \end{cases}.$$

Prodotto vettoriale:

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$



con $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| sen(\theta)$ e $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(ricorda la regola della mano destra!)

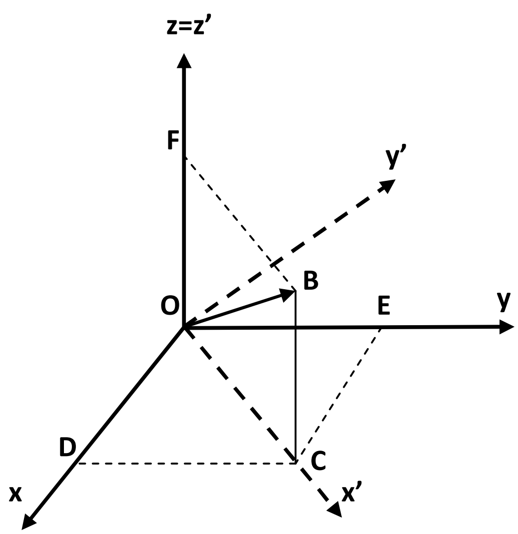
In coordinate cartesiane $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ si ha:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \vec{\imath}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{\jmath}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

e si osservi che $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$.

2. Esercizi sui vettori

I vettori sono stati introdotti, accanto agli scalari, per rappresentare grandezze fisiche in forma invariante rispetto a traslazioni o rotazioni del sistema di riferimento.



Si consideri il seguente esempio:

Il vettore $\overline{OB}$ è definito nel riferimento Oxyz. Esso presenta la seguenti componenti:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB_x} = \overline{OD}\vec{\imath} = 4.2\vec{\imath} \\ \overrightarrow{OB_y} = \overline{OE}\vec{\jmath} = 7.0\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OB_z} = \overline{OF}\vec{k} = 3.1\vec{k} \end{cases}$$ in tale sistema

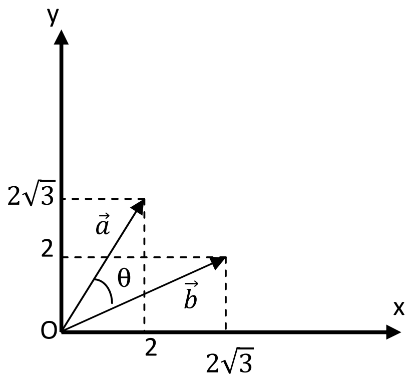
appare evidente che :

$$|\overline{OB}| = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2} \cong 8.7$$

Effettuiamo una rotazione della terna cartesiana in modo che x′ coincida con la direzione $\overrightarrow{OC}$. Il nuovo sistema di riferimento è Ox′y′z. Nel nuovo sistema di riferimento $\overrightarrow{OB}$ giace nel piano x′z e pertanto $\overrightarrow{OB} = \overline{OC}\vec{\imath'} + \overline{OF}\vec{k'}$. Ma ora $\overrightarrow{OB_{y'}} = 0$ con $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2} \cong 8.2$ e $\overline{OF} = 3.1$

Appare quindi evidente che, anche nel nuovo sistema, si ha $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\overline{OB}_{x'}{}^2 + \overline{OB}_{y'}{}^2 + \overline{OB}_{z'}{}^2} = \sqrt{8.2^2 + 0 + 3.1^2} \cong 8.7$

Esempio n°2:



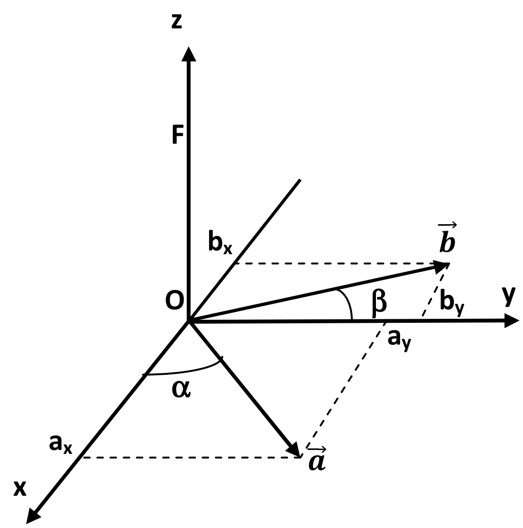
Siano dati $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 2\sqrt{3}\vec{\jmath}$ e $\vec{b} = 2\sqrt{3}\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Trovare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$.

Si procede alla determinazione di θ. Ora è noto che $\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos(\theta) = a_x b_x + a_y b_y = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. Ma anche

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16} = 4 \\ b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$

. Per cui si può scrivere $\cos(\theta)\frac{a_x b_x + a_y b_y}{ab} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = 0.866$ e quindi $\theta = 30°$. A questo punto $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab\sin(\theta) = 8$ e $\vec{a} \times \vec{b}$ è entrante nel foglio.

Esempio n°3:



In un riferimento *Oxyz* si considerino due vettori nel piano *xy*.

$\vec{a}$ con $|\vec{a}| = 4$ e α=45° posto a destra dell'asse *x*

$\vec{b}$ con $\left|\vec{b}\right| = 5$ e α=15° posto a destra dell'asse *y*

Determinare $\vec{a} \times \vec{b}$.

Sia $\vec{a}$ che $\vec{b}$ hanno a_z e b_z nulli. Quindi

$$\begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos(\alpha) = 4\cos 45° = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ a_y = |\vec{a}|\sin(\alpha) = 4\sin 45° = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

e quindi $\vec{a} = 2\sqrt{2}\vec{\imath} + 2\sqrt{2}\vec{\jmath} + 0\vec{k}$.

Per l'altro vettore si ha:

$$\begin{cases} b_x = -\left|\vec{b}\right| \sin(\beta) = -5 \sin 15° = -5 * 0.26 = -1.3 \\ b_y = \left|\vec{b}\right| \cos(\beta) = 5 \cos 15° = 5 * 0.96 = 4.6 \end{cases}$$

e quindi $\vec{b} = -1.3\vec{\imath} + 4.6\vec{\jmath} + 0\vec{k}$.

Di conseguenza

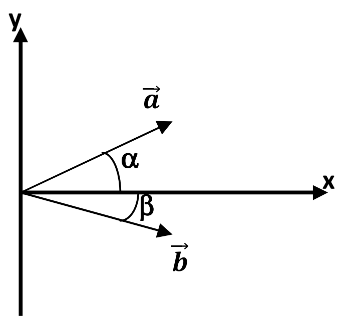
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ -1.3 & 4.6 & 0 \end{vmatrix} = \left(2\sqrt{2} * 4.6 + 2\sqrt{2} * 1.3\right)\vec{k} =$$
$$11.8\sqrt{2}\vec{k}$$

Per cui $\vec{a} \times \vec{b} = \{0 \quad 0 \quad 11.8\sqrt{2}\}$.

Esempio n°4:

Verificare tramite l'algebra vettoriale che

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$



Consideriamo due vettori così definiti

$$\begin{cases} \vec{a} = \cos(\alpha)\,\vec{\imath} + \sin(\alpha)\,\vec{\jmath} \\ \vec{b} = \cos(\beta)\,\vec{\imath} - \sin(\beta)\,\vec{\jmath} \end{cases}$$, per essi si ha, ovviamente, $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$.

Allora si esegue

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin(\alpha + \beta)\left[-\vec{k}\right]$ ma $\vec{a} \times \vec{b} = [\cos(\alpha)\,\vec{\imath} + \sin(\alpha)\,\vec{\jmath}] \times [\cos(\beta)\,\vec{\imath} - \sin(\beta)\,\vec{\jmath}] = \cos\alpha\cos\beta\,\vec{\imath} \times \vec{\imath} - \cos\alpha\sin\beta\,\vec{\imath} \times \vec{\jmath} + \sin\alpha\cos\beta\,\vec{\jmath} \times \vec{\imath} - \sin\alpha\sin\beta\,\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}$.

Ricordando che $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0$ e $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \vec{k}$ si ha che

$\vec{a} \times \vec{b} = \sin(\alpha + \beta)\left[-\vec{k}\right] = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\left[-\vec{k}\right]$ che era quanto da dimostrare, essendo unitari i moduli dei vettori.

3. <u>Cinematica del punto materiale</u>

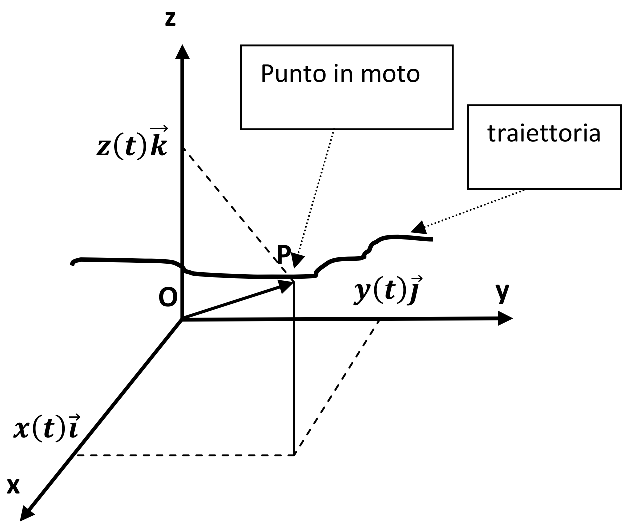
Si ricorda che:

a) la meccanica studia il moto dei corpi e le cause che lo determinano

b) la meccanica si divide in
   a. CINEMATICA, che studia le caratteristiche del moto indipendentemente dalle cause;
   b. DINAMICA, che studia le cause che determinano il moto;
   c. STATICA, che studia il caso dei corpi in quiete o in equilibrio.

c) nella Cinematica del punto materiale le dimensioni del corpo (*il punto*) sono trascurabili in relazione agli spostamenti

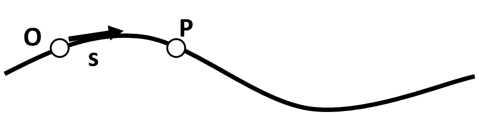
d) dato un opportuno sistema di riferimento



$\overrightarrow{OP}$rappresenta il vettore che individua istante per istante la posizione del punto nel sistema di riferimento.

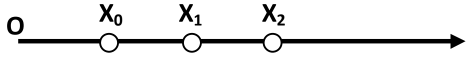
E ovviamente $\overrightarrow{OP} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ dove x(t), y(t) e z(t) sono le equazioni orarie delle componenti del moto di **P** lungo la sua traiettoria.

Ma si potrebbe anche definire una ascissa curvilinea **s** lungo la stessa traiettoria:



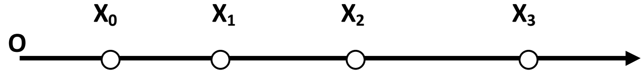
in tale caso sarà **s(t)** l'equazione oraria del moto.

e) Moto Rettilineo Uniforme



in tale caso la VELOCITA' è costante e si può scrivere $v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = cost.$ e quindi l'equazione oraria è $x(t) = x_0 + v_s t$ e puntualmente $v_s = \dot{x}(t)$.

f) Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato



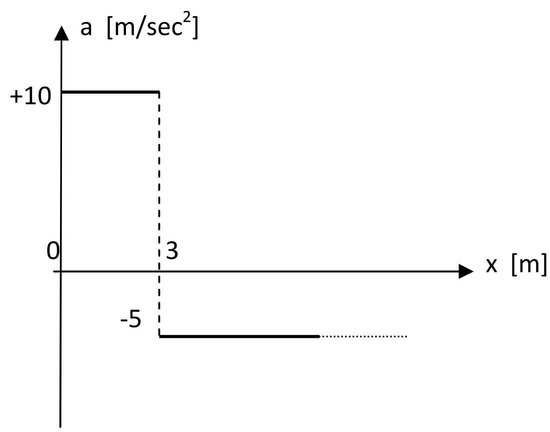
in tale caso è la ACCELERAZIONE ad

essere costante e, pertanto, si può scrivere $a = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = cost.$ e quindi avremo che $v(t) = v_0 + at$ e puntualmente $a = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$. In tale caso la legge oraria sarà $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

Un'altra utile relazione è poi la seguente: $v_f^2 - v_i^2 = 2as$ dove v_f e v_i sono, rispettivamente la velocità finale ed iniziale e s è lo spazio percorso.

Esempio n°5:

Un punto materiale si muove di moto uniformemente accelerato secondo il seguente diagramma dell'accelerazione.



Per *t=0* si ha *x=0* e *v=0*. Si chiede:

- Quanto spazio percorre prima di fermarsi?
- Quanto tempo dura il moto?

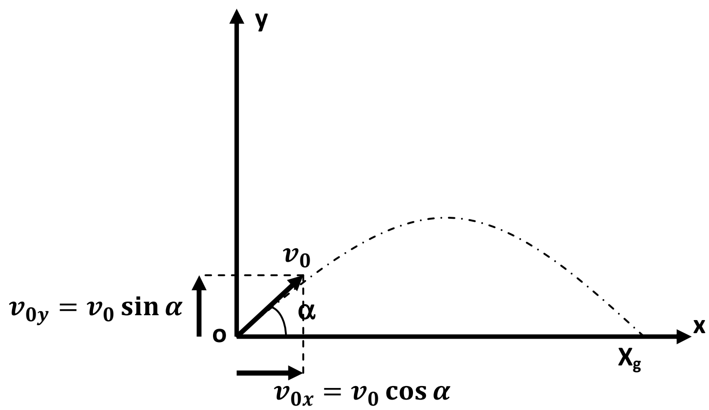
Dividiamo il problema in due fasi. In una prima fase il moto è accelerato con $a_1 = +10m/sec^2$, pertanto si avrà $x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2$ ed essendo $x_1=3m$ si avrà $t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} \cong 0.77sec$. Poi $v_1 = a_1 t_1 = 7.7m/sec$.

Nella seconda fase del moto $a_2 = -5m/sec^2$ e $x(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_1 t + x_1$ ed anche $\dot{x}(t) = a_2 t + v_1$. Pertanto l'arresto avverrà dopo un tempo t_2 determinabile come $a_2 t_2 + v_1 = 0$ e allora $t_2 = -\frac{v_1}{a_2} = \frac{7.7}{5} = 1.54sec$. Si calcola, quindi, lo spazio percorso $x_2 = -\frac{1}{2}5(1.54)^2 + 7.7(1.54) + 3 = 8.9m$. Tutto il moto dura $t_1 + t_2 = 2.31sec$.

Esempio n°6:

Un cannone lancia un proiettile a velocità $v_0=300m/sec$. Calcolare l'alzo del cannone per avere la massima gittata e determinarne il valore.

Schematizziamo il moto nel seguente grafico:



le componenti del moto sono le seguenti:

Asse x: *moto rettilineo uniforme.*

Asse y: *moto uniformemente accelerato.*

E allora potremo scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ x = v_{0x}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}$$

Considerando la gittata x_g, tale spazio sarà percorso dopo un tempo così determinabile:

$t = \frac{x_g}{v_{0x}} = \frac{x_g}{v_0 \cos\alpha}$ e dopo tale intervallo di tempo dovrà necessariamente essere *y=0*, per cui

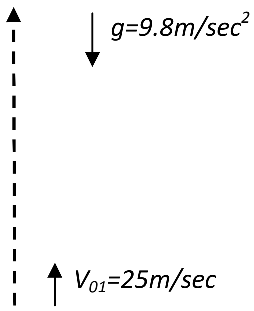
$0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_g}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\left(\frac{x_g}{v_0 \cos\alpha}\right)$. Da cui si ha:

$x_g\left[gx_g - 2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\right] = 0$, e scartando la soluzione nulla avremo $x_g = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Per determinare il valore massimo $\frac{dx_g}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} 2\cos 2\alpha = 0$ e si avrà $2\alpha=90°$ ovvero $\alpha=45°$. Mentre il valore della gittata sarà $x_{gmax} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(300)^2}{9.8} = 9183.67m$

Esempio n°7:

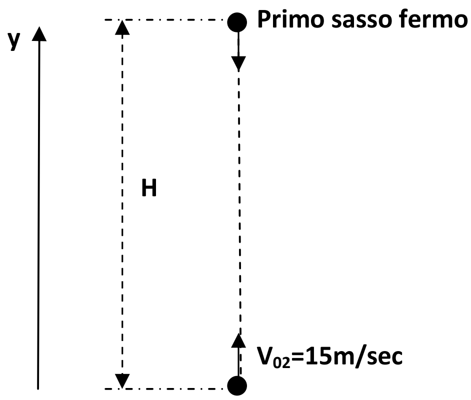
Un sasso è lanciato verso l'alto con $v_{01}=25m/sec$. Calcolare la massima quota raggiunta ed il tempo impiegato. Un secondo sasso è lanciato verso l'alto, sulla stessa traiettorie del primo, con $v_{02}=15m/sec$ ed esattamente quando il primo ha raggiunto la massima quota. Dopo quanto tempo si scontreranno? E a quale quota?



$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{01}t$ ed anche $v_f^2 - v_{01}^2 = -2gH$; lo stop avverrà per v_f=0 e quindi $H = \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{(25)^2}{2(9.8)} \cong 31.88m$.

Poi dalla definizione di accelerazione $a = -g = \frac{v_f - v_{01}}{t_f - t_0}$, pertanto $t_f = \frac{v_{01}}{g} = \frac{25}{9.8} \cong 2.55sec$.

Per il secondo sasso si deve scegliere un conveniente sistema di riferimento.



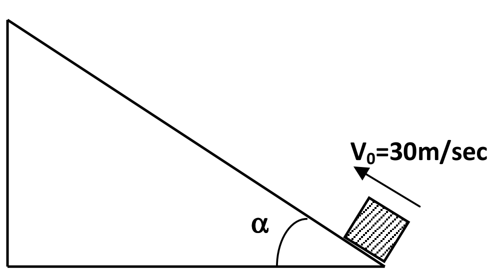
In tale sistema di riferimento si potrà scrivere:

$$\begin{cases} y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{02}t \\ y_1(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$

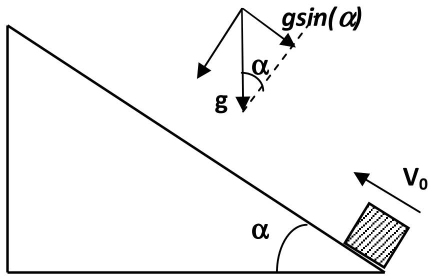
Al momento dell'impatto dovrà essere y_1=y_2. Quindi si scriverà:

$H - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{02}t$ e semplificando $t_{imp} = \frac{H}{v_{02}} = \frac{31.88}{15} \cong 2.12sec$. E per calcolare la quota di impatto basta usare una qualunque delle due equazioni orarie, quindi $y_{imp} = H - \frac{1}{2}gt_{imp}^2 = 31.88 - \frac{1}{2}9.8(2.12)^2 \cong 9.36m$.

Esempio n°8:



Piano inclinato con α=45°. Un oggetto è lanciato lungo il piano inclinato con velocità iniziale v_0=30m/sec. Dopo quanto tempo si ferma? E a che altezza dal suolo?



Decomponendo l'accelerazione di gravità nel seguente modo:

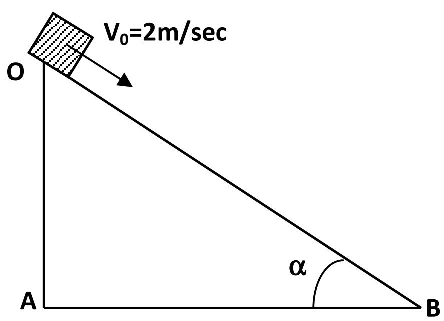
è evidente che, considerando il sistema di riferimento opportunamente orientato nella direzione del moto, il moto stesso sarà decelerato con una decelerazione $a = g\sin\alpha = 9.8\sin 45° = 6.93 m/sec^2$

Si deve concludere che il moto è uniformemente decelerato e dalla definizione di accelerazione:

$-g\sin\alpha = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{-v_i}{t_f}$. Pertanto si può calcolare $t_f = \frac{v_i}{g\sin\alpha} = \frac{30}{6.93} = 4.32 sec.$

Per determinare l'altezza dal suolo, essendo S lo spazio percorso lungo il piano inclinato, si ha $v_f^2 = v_i^2 + 2aS$ e quindi $S = \frac{-v_i^2}{-2g\sin\alpha} = \frac{30^2}{2(6.93)} = 64.9m$. Ed infine $H = S\sin\alpha = 45.9m$.

Esempio n°9:



Ancora un piano inclinato con **OA=10m** e **AB=16m**. L'oggetto è posto in cima al piano inclinato e possiede una velocità iniziale ***v₀*=2*m/sec*** ed è lasciato libero di cadere.

a) Quanto varrà la velocità in **B**?
b) Quanto tempo impiegherà a cadere?
c) E se fosse lasciato cadere in verticale da **O** con la stessa v_0 quanto varrebbero i valori precedentemente calcolati?

È evidente che ora il moto è accelerato e l'accelerazione vale $a = \sin\alpha$. Per trovare **α** si ha $\tan\alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{10}{16} = 0.625$ e quindi $\alpha = \tan^{-1} 0.625 = 32°$ e $\sin\alpha = 0.53$

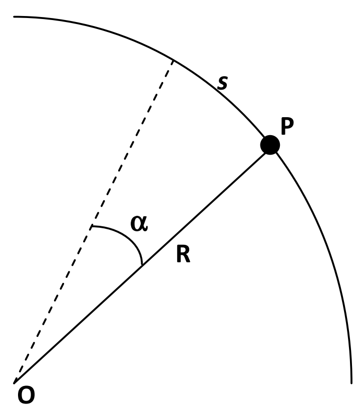
Poi calcolato lo spazio percorso come $S = OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 18.86m$ si ha $v_f^2 = v_0^2 + 2aS$ da cui $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2aS} = \sqrt{2^2 + 2(9.8)(0.53)(18.86)} = 14.1m/sec.$

Dalla definizione di accelerazione $a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$ si ha che $t_f = \frac{v_f - v_0}{g \sin\alpha} = \frac{14.1-2}{9.8(0.53)} = 2.33sec.$

Se invece il corpo è lasciato cadere verticalmente esso percorre il tratto **OA** con accelerazione g. Allora si avrà $v_f^2 = v_0^2 + 2g(OA)$ e quindi $v_f = \sqrt{2^2 + 2(9.8)(10)} = 14.14m/sec$. Mentre per il tempo di percorrenza $t_f = \frac{v_f - v_0}{g} = \frac{14.14-2}{9.8} = 1.23sec.$

Esempio n°10:

Un caso di <u>Cinematica Rotazionale.</u>

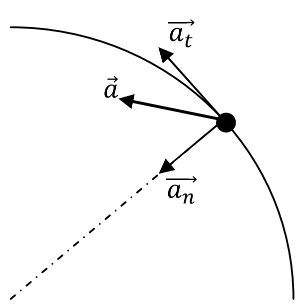


Un punto materiale **P** si muove lungo una traiettoria circolare di centro **O** e raggio **R** seguendo la legge oraria:

$s = \alpha R = \frac{1}{2}ct^2$ con ***c=1m/sec²***.

Determinare il modulo della sua accelerazione nel punto in cui ha percorso un arco $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *radianti*.

Si tratta di moto circolare uniformemente accelerato. Infatti, per la componente tangenziale, si ha $\dot{s} = v_t = ct$ e $\ddot{s} = c = 1m/sec^2$ ovvero costante. Ma è anche noto che, nei moti rotatori, vi è anche il contributo di accelerazione centripeta.



Quindi si avrà $\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$ con $|\vec{a}| = \sqrt{|\overrightarrow{a_t}|^2 + |\overrightarrow{a_n}|^2}$.

E per le singole componenti

$\begin{cases} a_t = \dot{v}_t = \ddot{s} = c \\ a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{(\dot{s})^2}{R} = \frac{c^2t^2}{R} \end{cases}$. Osservare che la componente normale va calcolata all'istante in cui $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\, radianti$. Ora $\alpha = \frac{1}{2}\frac{ct^2}{R}$ e quindi $t^2 = \left.\frac{2\alpha R}{C}\right|_{\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{c}$.

Allora in quel preciso istante $a_n = \frac{c^2t^2}{R} = \frac{c^2}{R}\frac{R\sqrt{3}}{c} = c\sqrt{3} = \sqrt{3}m/sec^2$ essendo ***c*=1*m/sec*²**. Invece $\boldsymbol{a_t = c}$ e pertanto $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2m/sec^2$ all'istante in cui $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\, radianti$.

4. Dinamica del punto materiale

> ***Primo Principio****: se la somma delle sollecitazioni esterne ad un corpo è nulla esso permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

(Versione originale di Newton)

> ***Primo Principio****: se la somma delle sollecitazioni esterne ad un corpo è nulla esso presenta una* ***quantità di moto costante****.*

E da ciò segue: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (*prima equazione cardinale*) e, se $\sum \overrightarrow{F_e} = 0$ allora $\vec{p} = cost.$ (*conservazione della quantità di moto*)

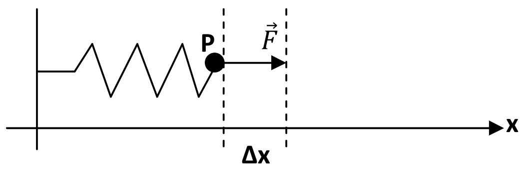
Secondo Principio: $\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}$

Terzo Principio: è il principio di azione e reazione.

È bene ricordare anche:

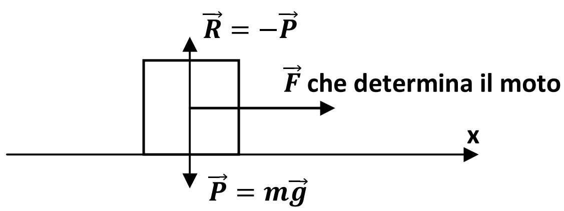
1) Impulso di una forza: *ovvero la variazione della quantità di moto a seguito della applicazione di una forza per un certo intervallo di tempo.* $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$.

2) Forze elastiche:



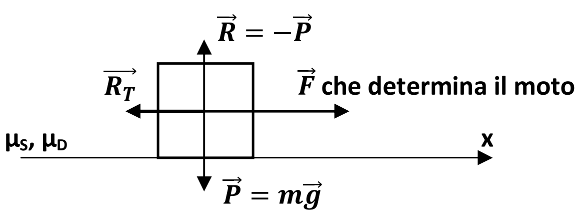
La forza $\boldsymbol{F}$ provoca l'allungamento della molla di una quantità Δx. Pertanto la forza elastica è esprimibile come $\vec{F} = -k\Delta x\vec{\imath}$ dove $\boldsymbol{k}$ è la costante elastica della molla.

3) La Reazione Vincolare:



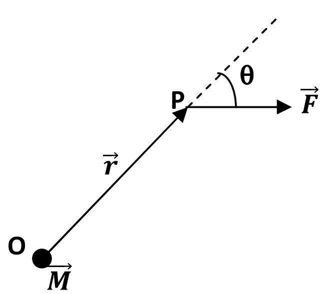
essa rappresenta l'azione del vincolo su cui si muove il corpo.

Le reazioni vincolari sono particolarmente rilevanti in presenza di attriti.



in tale caso si ha $\overrightarrow{R_T} = \mu_S\vec{R}$ ricordando anche che $\mu_S \geq \mu_D$.

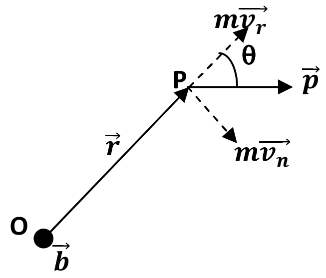
4) Momento di una Forza:



esso è definito come $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ dove $\vec{r}$ è il braccio.

Chiaramente per il modulo $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$.

5) Momento della Quantità di Moto:



esso è così definito:

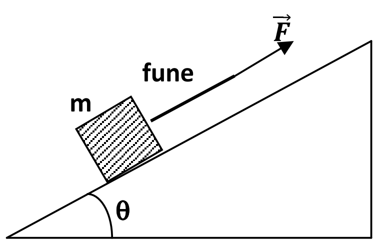
$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\overrightarrow{v_r} + \vec{r} \times m\overrightarrow{v_n} = \vec{r} \times m\overrightarrow{v_n}$ ovvero $|\vec{b}| = mrv_n = mrv \sin\theta$, ed essendo anche $\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{v_n}}{r}$ si ha $\vec{b} = mr^2\vec{\omega}$ e $|\vec{b}| = mr^2\omega$ (*trattandosi di moto rotatorio*).

Si ricorda anche $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ e poi $\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ poiché $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ed è $\vec{v}$ parallela a $\vec{p}$.

È facile concludere che $\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$ che è la ***seconda equazione cardinale della dinamica***.

Da tale equazione si ha che se $\sum \vec{M} = 0$ ne consegue $\vec{b} = cost.$ ovvero il ***principio di conservazione del momento della quantità di moto***.

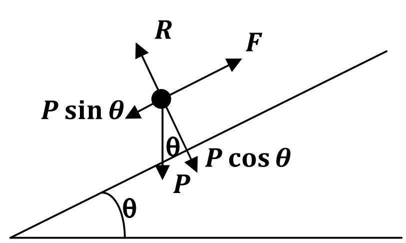
Esempio n°11:



è noto che m=50kg e θ=45°.

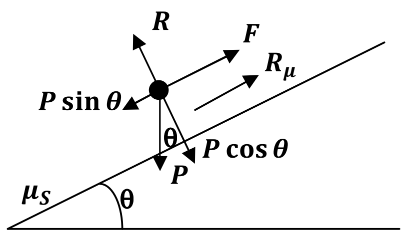
1. Trovare il valore di **F** tale che il corpo resti fermo
2. E se c'è attrito? Sia ***μ_S=0.4*** quanto deve valere **F**?
3. E con quale inclinazione del piano inclinato, in presenza di attrito, il corpo resta in equilibrio?

Nella prima situazione si ha



e per l'equilibrio della reazione vincolare $|\vec{R}| = mg\cos\theta$. Di conseguenza dovrà essere $F = mg\sin\theta = 346.5N$.

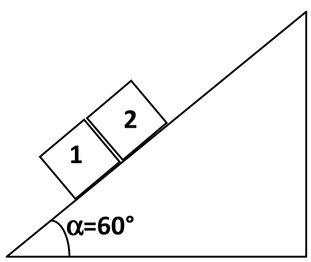
Nella seconda situazione compare anche l'attrito



ovviamente si ha $R_\mu = \mu_S R = \mu_S mg\cos\theta$ e quindi dovrà essere $F = P\sin\theta - \mu_S R = mg[\sin\theta - \mu_S\cos\theta]$=207.8N.

Per quanto riguarda la situazione di equilibrio deve essere verificata la condizione $\mu_S R \geq P\sin\theta$ ovvero $\mu_S mg\cos\theta \geq mg\sin\theta$ e quindi dovrà essere $\theta \leq \tan^{-1}\mu_S = 21.8°$.

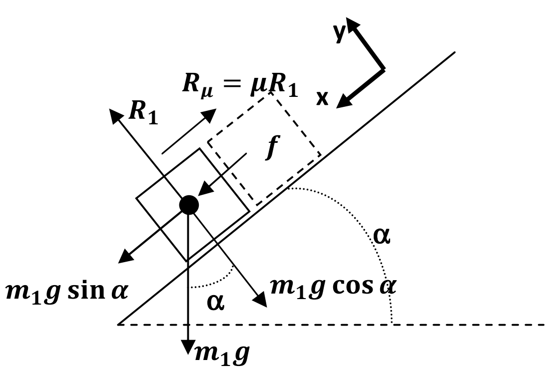
Esempio n°12:



Due corpi con m_1=m_2=2kg sono a contatto e scivolano lungo un piano inclinato. Il primo corpo ha μ=0.2; il secondo è privo di attrito. Con quale forza il corpo n°2 agisce sul corpo n°1?

È ovvio che il corpo n°2 agisce sul corpo n°1 con una forza *f*, ma è altrettanto ovvio, per il principio di azione e reazione, che il corpo n°1 reagisce verso il n°2 con una forza ***–f***.

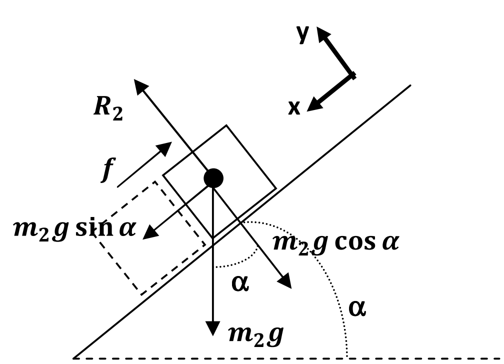
Allora per il n°1 si ha:



prendendo in considerazione il sistema cartesiano indicato

•Asse x: $m_1 a = m_1 g\sin\alpha + f - \mu m_1 g\cos\alpha$

•Asse y: $R_1 = m_1 g\cos\alpha$



E in modo analogo per il n°2 si ha:

•Asse x: $m_2 a = m_2 g\sin\alpha - f$

•Asse y: $R_2 = m_2 g\cos\alpha$

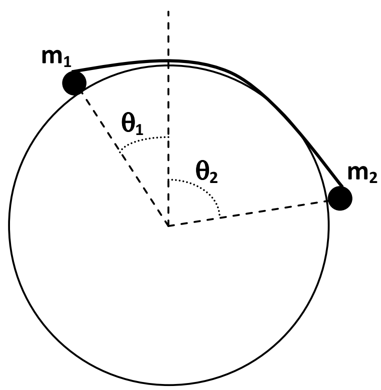
Ora si deve ricordare che $\boldsymbol{m_1}$=$\boldsymbol{m_2}$ e quindi $R_1=R_2$ ed anche $m_1a=m_2a$. Allora è possibile eguagliare le due equazioni relative all'asse x e avere:

$$m_1 g \sin\alpha + f - \mu m_1 g \cos\alpha = m_2 g \sin\alpha - f$$

Da cui (essendo $m_1=m_2$) è ovvio concludere che:

$f = \frac{1}{2}\,\mu m_1 g \cos\alpha = \frac{1}{2} 0.2(2)(9.8)\cos 60° = 0.98N.$

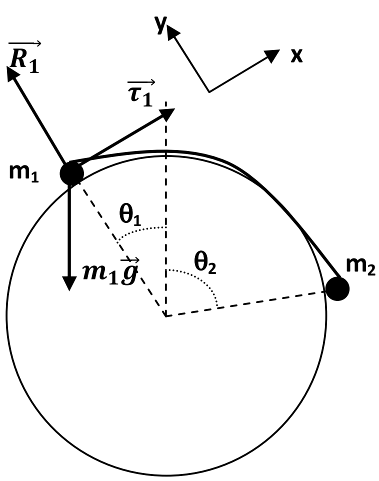
Esempio n°13:



Due oggetti puntiformi di massa m_1=0.2kg e m_2=0.1kg sono in equilibrio su una superficie cilindrica legate da un filo senza peso ed inestensibile. È noto che θ_1=30°. Calcolare la tensione τ del filo e il modulo delle reazioni vincolari R_1 e R_2 nei punti di appoggio.

Essendovi un equilibrio, per ogni massa, la somma vettoriale di tutte le forze applicate deve essere nulla.

Allora per m_1=0.2kg si ha:



$$\boldsymbol{m_1\vec{g} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{\tau_1} = 0}$$

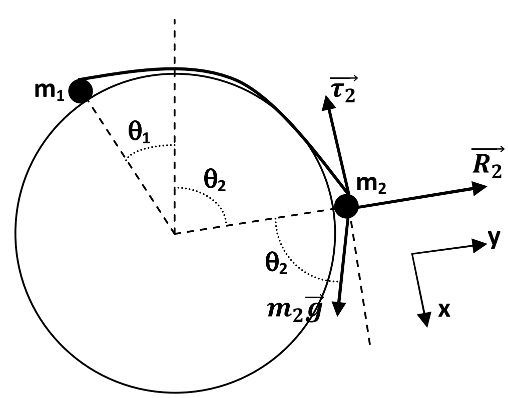
E proiettata sui due assi:

•asse x: $-m_1 g \sin\theta_1 + 0 + \tau_1 = 0$ (1)
•asse y: $-m_1 g \cos\theta_1 + R_1 + 0 = 0$ (2)

Mentre per m_2=0.1kg si ha:

$$\boldsymbol{m_2\vec{g} + \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{\tau_2} = 0}$$

E proiettando sui due assi usati in precedenza si ha:



•asse x: $m_2 g \sin\theta_2 + 0 + \tau_2 = 0$ (3)
•asse y: $-m_2 g \cos\theta_2 + R_2 + 0 = 0$ (4)

Dalla (2) è immediato calcolare $R_1 = m_1 g \cos\theta_1 = 0.2(9.8)\cos 30° = 1.7N$.

Dalla (1) si ricava τ_1 ma anche τ_2 visto che τ_1=τ_2 essendo il filo inestensibile. Quindi $\tau_1 = \tau_2 = m_1 g \sin\theta_1 = 0.2(9.8)\sin 30° = 0.98N$.

Poi dalla (3) si ha $\sin\theta_2 = \frac{\tau_2}{m_2 g} = \frac{0.98}{0.1(9.8)} = 1$ e da ciò segue $\theta_2 = 90°$.

Allora, dalla (4), $R_2 = m_2 g \cos\theta_2 = 0$.

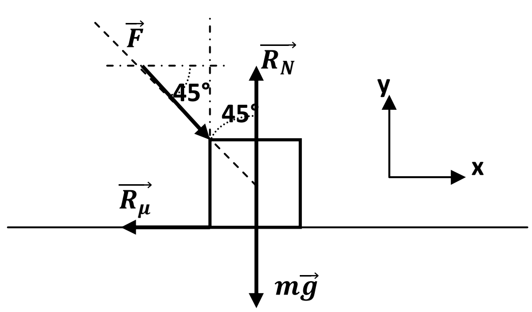
Esempio n°14:

Un corpo rigido di massa m=1kg può muoversi su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu = \frac{1}{2}$. Se si applica ad esso una forza **F** che forma angolo di 45° con la normale al piano e orientata verso il basso il moto sarà rettilineo uniforme. Calcolare **F**.

Dalla prima equazione cardinale

$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ poiché ***v=costante*** (moto rettilineo uniforme).

Allora schematizziamo il sistema



$$\vec{\mathbf{F}} + \overrightarrow{\mathbf{R_\mu}} + \overrightarrow{\mathbf{R_N}} + \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$$

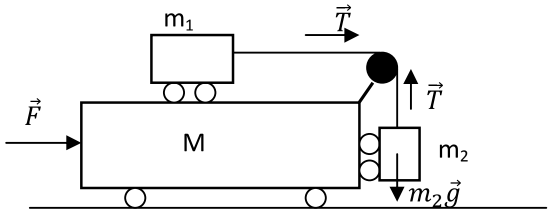
E proiettando sugli assi indicati:

•asse y: $-F\sin 45° + 0 + R_N - mg = 0$
•asse x: $F\cos 45° - \mu R_N + 0 + 0 = 0$

Si ricava $R_N = mg + F\sin 45°$ e si sostituisce. Quindi si ha:

$F\cos 45° - \mu(mg + F\sin 45°) = 0$ da cui è immediato ricavare $F = \frac{\mu mg}{\cos 45° - \mu \sin 45°} = \frac{0.5(1)(9.8)}{0.707 - 0.5(0.707)} = 13.86N$.

Esempio n°15:



Trascurando tutti gli attriti e considerando carrucole, carrelli e funi ideali, quale deve essere la forza **F** perché $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$ non si muovano relativamente a **M**?

Tutto il sistema si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $\boldsymbol{a}$. Quindi $(M + m_1 + m_2)a = F$.

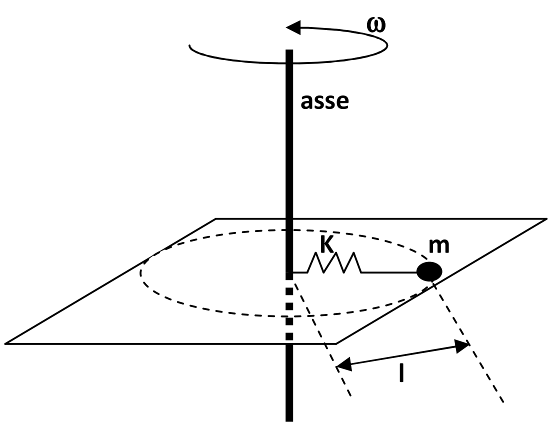
Essendo la fune ideale e inestensibile è evidente che il modulo della tensione della fune è lo stesso nei vari punti.

Inoltre se $\boldsymbol{m_1}$ deve essere fermo rispetto a **M** dovrà essere: $m_1 a - T = 0$.

Anche $\boldsymbol{m_2}$ deve fermo rispetto a **M**, quindi: $m_2 g - T = 0$. Se sostituiamo **T** si ha: $a = \frac{m_2}{m_1} g$ e quindi $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}) \frac{\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{m_1}} \boldsymbol{g}$.

Esempio n°16:

Un corpo puntiforme di massa m=0.2kg è appoggiato ad un piano orizzontale e privo di attrito. Esso è collegato ad un asse verticale di massa trascurabile con una molla di massa trascurabile e con costante elastica K=0,2N/m. Si calcoli quanti giri al secondo deve fare l'asse, in moto uniforme, perché l'allungamento della molla sia del 4%.



dovendo essere il moto circolare uniforme è evidente che sarà $\dot{\omega} = 0$ e quindi $\omega = cost$.

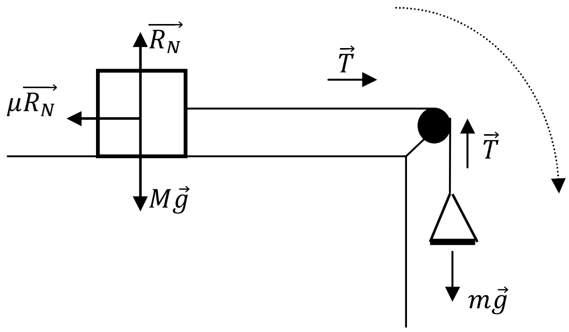
Ponendoci quindi sopra la massa $\boldsymbol{m}$ dovremo vedere, durante la rotazione, un equilibrio tra la forza centrifuga e forza elastica di reazione della molla. Pertanto si potrà scrivere $F_C = F_X$ con

$\begin{cases} F_C = m\omega^2 l \\ F_X = K\Delta l \end{cases}$. E allora si avrà $m\omega^2 l = K\Delta l$ da cui $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}\frac{\Delta l}{l}}$. E passando in giri al secondo si ha ${giri}/_{sec} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}\frac{\Delta l}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.2}{0.2}0.04} = 0.032$ giri/sec.

Esempio n°17:

Su un piano ruvido è appoggiato un corpo di massa M=1kg. Ad esso è attaccato un filo inestensibile e di massa trascurabile passante per una carrucola ideale. All'altro estremo del filo c'è un piattello in cui sono posate in successione delle piccole masse. Nel momento in cui inizia il moto si ha m=0.5kg. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia i $\frac{2}{3}$ di quello statico, definire il moto di M.

Distinguiamo il problema in due fasi. Nella prima fase siamo al momento del distacco e quindi il moto ancora non è iniziato. In tale situazione possiamo scrivere per le due masse: $\begin{cases} 0 = T - \mu_S Mg \\ 0 = mg - T \end{cases}$. Allora possiamo subito ricavare il coefficiente di attrito statico risolvendo il precedente sistema e avere: $\mu_S = \frac{m}{M}$. Ma essendovi una nota relazione tra il coefficiente di attrito statico e quello dinamico si ha, in definitiva: $\mu_D = \frac{2}{3}\mu_S = \frac{2}{3}\frac{m}{M}$.



Nella seconda fase inizia il moto che sarà di tipo accelerato. Pertanto si possono scrivere le equazioni della dinamica per entrambe i corpi, e si avrà:

•per la massa $\boldsymbol{M}$: $Ma = T - \mu_D Mg = T - \frac{2}{3}\frac{m}{M}Mg = T - \frac{2}{3}mg$

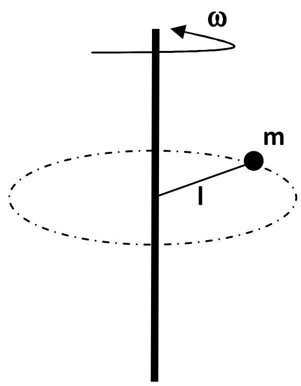
•per la massa $\boldsymbol{m}$: $ma = mg - T$

Risolvendo il sistema, eliminando $\boldsymbol{T}$ tra di esse, si ha:

$Ma = mg - ma - \frac{2}{3}mg$ e quindi $a = \frac{1}{3}\frac{mg}{m+M} = 0.15 m/sec^2$.

Esempio n°18:

Una massa puntiforme di massa m=100g è legata da un filo inestensibile (di lunghezza l=1m) ad un asse verticale girevole di diametro e massa trascurabili. Supponendo che il corpo, così vincolato, ruoti con moto circolare uniforme con 0.5 giri/sec si calcoli la tensione del filo se la lunghezza di esso è ridotta a $\frac{1}{4}$ di quella originaria.

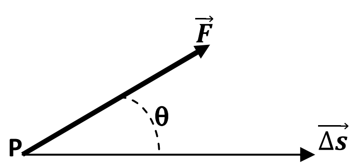


Classico problema di applicazione della seconda equazione cardinale. Essa è $\sum \vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$ ed essendo il moto circolare uniforme, d'altro canto ponendoci sulla massa m osserviamo sia la forza centrifuga che la tensione del filo che si fanno equilibri e che presentano momento nullo rispetto all'asse, si conclude che $b = cost.$ È quindi un problema di conservazione del momento della quantità di moto. Ora la velocità angolare iniziale risulta essere $\omega_i = 2\pi(0.5) = \pi\, rad/sec.$ E per la conservazione del momento angolare $m\omega_i l^2 = m\omega_f \left(\frac{l}{4}\right)^2$ da cui si ricava $\omega_f = 16\omega_i = 50.24\, rad/sec.$

Come già detto dovrà essere ***T*=*F*$_C$** e quindi $T = m\omega_f^2 \frac{l}{4} = 0.1(50.24)^2(0.25) = 63.1N$

5. <u>Lavoro ed Energia per il punto materiale</u>

- definizione di lavoro

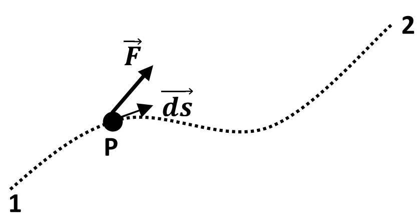


applico a **P** una forza $\vec{F}$ e **P** si sposta di $\overrightarrow{\Delta s}$. Il lavoro compiuto da $\vec{F}$ è

$$L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta s} = F\Delta s \cos\theta \quad [joule].$$

Se $\vec{F}$ e $\overrightarrow{\Delta s}$ sono tra loro **ortogonali** allora il lavoro compiuto dalla forza è **nullo**.

- in generale:



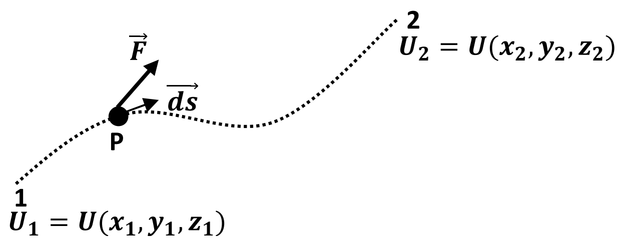
il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ nel tragitto di **P** dal punto **1** al punto **2** è determinabile con il seguente integrale curvilineo:

$$L = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

- se il campo di forze è **conservativo** allora $\oint \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$ e si può definire la **funzione scalare *Energia Potenziale***.

Essa è una **funzione puntuale** $[U(x,y,z)]$ del campo; esprime la capacità delle forze del campo a compiere lavoro. Una volta nota, si può scrivere:

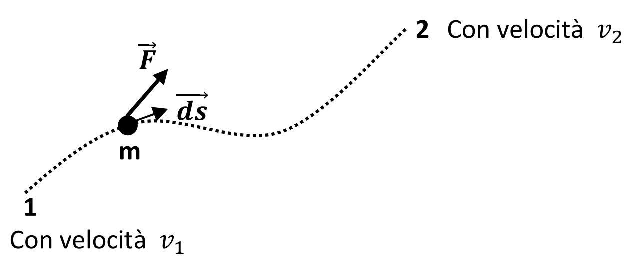
$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = U_1 - U_2$$



- ricordare anche che se è nota la $U(x,y,z)$ di un campo di forze conservativo, grazie alla definizione di gradiente, si ha:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

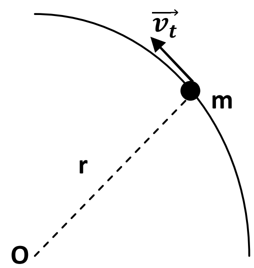
- Teorema del lavoro e dell'Energia Cinetica (FORZE VIVE)



Dalla definizione di energia cinetica, posso scrivere:

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1$$

- Se il moto è rotazionale e considerando $v = v_t$ (*velocità tangenziale*) e ricordando che $\omega r = v_t$ si ha:



$T = \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$. Si osservi che il termine tra parentesi sarà definito in seguito come ***momento di inerzia***.

- Alcune utili espressioni per l'energia potenziale
  - Campo Gravitazionale: $U(y) = -mgy$ [*y dal suolo*]
  - Campo di Forze Elastiche: $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ [*x=compressione*]
- E comunque nei **campi di forze conservativi** vale la **conservazione dell'energia meccanica**: $E = U + T = cost.$
- E se ci sono forze non conservative? In tale caso si può scrivere

$$\sum L_{nc} + \sum L_c = T_2 - T_1$$

Ma è anche vero che $\sum L_c = U_1 - U_2$, per definizione di energia potenziale, e quindi ho:

$$\sum L_{nc} = (U_2 + T_2) - (U_1 + T_1) = E_2 - E_1$$

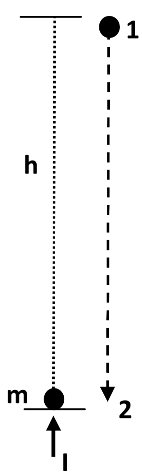
Esempio n°19:

Un locomotore di massa M=100 tonnellate giunge contro due respingenti di fine corsa alla velocità di 0.504 km/h. Noto che le molle dei due respingenti hanno K=1.1*10^4 N/m di quanto rientreranno i respingenti al completo arresto del locomotore? (Si trascuri ogni attrito)

- Nel momento in cui si possono trascurare gli attriti ci troviamo in un campo di forze conservativo. Tra l'altro vanno solo considerate le forze elastiche, poiché il locomotore non subisce variazioni di quota e pertanto non esistono variazioni di energia potenziale gravitazionale.

- È quindi un classico problema di conservazione dell'energia meccanica.
- Prima dell'urto l'energia è tutta cinetica ed è esprimibile come $T = \frac{1}{2}Mv^2$ dove $v = 0.504\left(\frac{1000}{3600}\right) = 0.14m/sec$.
- Al completo arresto tutta l'energia cinetica è diventata energia potenziale elastica accumulata nelle due molle dei respingenti. Pertanto si potrà scrivere $\frac{1}{2}Mv^2 = 2\left(\frac{1}{2}K\Delta x^2\right)$.
- Risolvendo l'ultima espressione si ha $\Delta x = \sqrt{\frac{M}{2K}} = 0.14\sqrt{\frac{10^5}{1.1\cdot 10^4}} = 0.3m$

Esempio n°20:



Con un impulso verticale di modulo ***I*** si fa salire un punto materiale di massa ***m*=*1kg*** lungo una guida verticale di altezza ***h*=*2m***. Giunto alla quota ***h*** il punto il punto ricade lungo la guida e giunge a terra con una energia cinetica ***T=8joule***. Lungo la guida hanno sempre agito forze dissipative in modulo costante e sempre opposte al moto. Calcolare l'impulso ***I***.

- Siamo in presenza di forze di attrito, quindi non conservative, allora non posso applicare il teorema della conservazione dell'energia ma posso usare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica nella sua accezione più generale. Ovvero:

$$L_{nc} + L_c = \Delta T$$

- Nella fase di salita del corpo si può sfruttare la definizione di impulso: $I = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = p_f - p_i = mv_f - mv_i$. Dove la v_f è proprio la velocità che è conseguenza della applicazione stessa dell'impulso ***I***, mentre la v_i deve essere necessariamente **nulla**. Allora si avrà $I = mv_f$ e quindi $v_f = \frac{I}{m}$.
- Si può quindi scrivere l'energia cinetica iniziale come:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}\frac{I^2}{m}$$

- Applichiamo ora il teorema del lavoro e dell'energia cinetica e scriviamo:

$$T_1 - T_2 = -mgh - Fh$$

Ovviamente $\boldsymbol{T_1=0}$ (*il corpo si ferma nel punto 1*) e sia la forza peso che la forza di attrito compiono un lavoro contro il moto.

In definitiva:

$$\frac{1}{2}\frac{I^2}{m} = mgh + Fh$$

- Nella fase di discesa il punto parte da fermo e poi giunge a terra con una energia cinetica T. Quindi il sopra citato teorema ora si scriverà come:

$$T - 0 = mgh - Fh$$

Ora la forza peso lavora a favore mentre l'attrito è sempre contrario al moto.

Ricavo quindi $F = mg - \frac{T}{h}$ e sostituisco nella prima equazione energetica

$$I^2 = 2m\left[mgh + h\left(mg - \frac{T}{h}\right)\right] = 2m[2mgh - T]$$

E quindi

$$I = \sqrt{2m[2mgh - T]} = \sqrt{2(1)[2(1)(9.8)(2) - 8]} = 7.9Nsec$$

Esempio n°21:

Un carro ferroviario vuoto di massa $\boldsymbol{m_1=10^5kg}$ transita su un binario con velocità $\boldsymbol{v_0=0.6m/sec}$. Passando sotto un distributore gli vengono versati $m_2 = 2 \cdot 10^5 kg$ di carbone. Trascurando tutti gli attriti e la rotazione delle ruote quanto vale la sua energia cinetica finale?

- Il sistema è da considerarsi isolato e risulta nulla la somma vettoriale di tutte le forze applicate, pertanto si deve conservare la quantità di moto:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_f$$

E da ciò posso ricavare $v_f = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$.

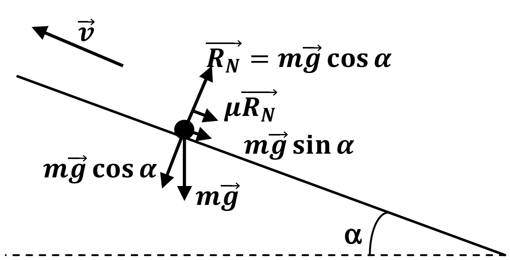
Quindi per l'energia cinetica:

$$T_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1)^2}{m_1 + m_2} v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(10^5)^2}{3(10^5)}(0.6)^2 = 6000 joule$$

Esempio n°22:

Una sciovia è installata su un pendio con un angolo α=20° rispetto all'orizzontale. A pieno carico essa trascina 80 sciatori con un peso medio di 80kg. Supponendo che il coefficiente di attrito degli sci valga μ=0.06 e trascurando tutte le altre forze passive, calcolare la potenza del motore se si vuole una velocità di risalita di 2m/sec.

- Ricordiamo che la potenza è $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, quindi si deve calcolare la forza di trascinamento.



Riferendoci allo schema a lato è evidente che la forza di trascinamento, per avere una velocità di risalita costante, dovrà essere pari a:

$$F = mg\sin\alpha + \mu R_N$$

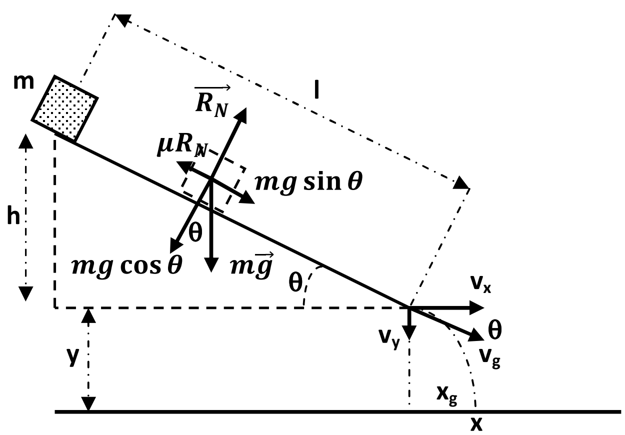
e quindi $F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

A questo punto la potenza sarà data da:

$P = Fv = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v = 80(80)(9.8)(\sin 20° + 0.06\cos 20°)2 = 50kW$.

Esempio n°23:

Un corpo puntiforme di massa ***m=1kg*** è posto in cima ad un piano inclinato con ***θ=30°.*** Il piano è lungo ***l=10m*** e la sua base è posta ad una altezza ***y=2m*** dal suolo. Supponendo che il piano abbia un coefficiente di attrito ***μ=0.3*** si calcoli a che distanza dall'origine del piano cadrà il corpo, una volta liberato.



- Lungo il piano inclinato agiscono forze non conservative (*attriti*) e conservative (*forza peso*). Allora devo applicare il principio generale del lavoro e dell'energia cinetica:

$$L_{nc} + L_c = \Delta T$$

- Nel caso in esame:
  - $L_c = mgh$ (*è solo la forza peso che compie tale lavoro e uso la variazione di energia potenziale coinvolta*)
  - $L_{nc} = -\mu R_N l = -\mu mg\cos\theta\, l$ (*si oppone al moto*)
  - Pertanto si ha

$$mgl\sin\theta - \mu mg\cos\theta\, l = \frac{1}{2}mv_g^2 - 0$$

$$2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta) = v_g^2$$

$$v_g = \sqrt{2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = \sqrt{2(9.8)(10)(\sin 30° - 0.3\cos 30°)} \cong 6.86 m/sec$$

  - Ora siamo in presenza di un moto uniformemente accelerato sulla componente verticale della velocità, quindi:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_y t = \frac{1}{2}gt^2 + v_g\sin\theta\, t$$

- Ma lungo l'asse x ho $x_g = v_x t = v_g \cos\theta\, t$ e allora $t = \frac{x_g}{v_{g\cos\theta}}$ e sostituendo

$$\frac{1}{2} g \left(\frac{x_g}{v_{g\cos\theta}}\right)^2 + v_g \sin\theta \frac{x_g}{v_{g\cos\theta}} = y$$

$$\frac{1}{2} g \frac{x_g^2}{v_g^2 (\cos\theta)^2} + x_g \tan\theta = y$$

$$0.14 x_g^2 + 0.58 x_g = 2$$

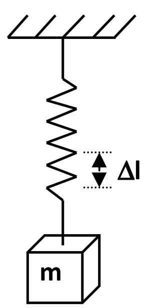
$x_g = \frac{-0.58 \pm \sqrt{0.58^2 - 4(0.14)}}{0.28} = 2.24\text{m}$ (*solo la soluzione positiva*)

- E in definitiva

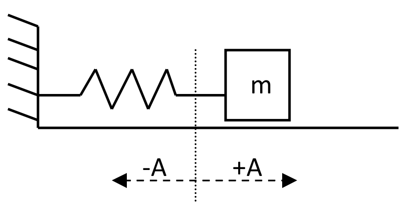
$$x = x_g + l\cos\theta = 2.24 + 10\cos 30° = 10{,}9m$$

Esempio n°24:

Una massa m=2kg è inizialmente appesa alla estremità di una molla verticale e ne provoca l'allungamento Δl=40cm in situazione statica.



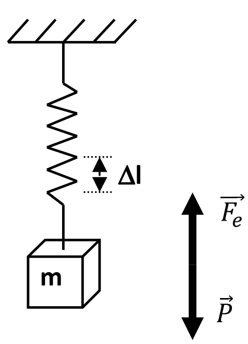
Successivamente la molla e la massa sono sistemati su un piano orizzontale privo di attrito, come indicato:



e la massa è fatta oscillare con ampiezza A=20cm.

Calcolare la frequenza e la massima accelerazione del moto oscillatorio.

In situazione statica è evidente l'equilibrio tra la forza peso e la forza elastica.



E quindi $0 = mg - K\Delta l$ da cui si può determinare la costante elastica della molla $K = \frac{mg}{\Delta l}$.

Adesso si esamina il problema nella situazione dinamica e si osserva che posta in oscillazione la molla si è in presenza di un moto armonico. Quindi

$$ma = m\ddot{x} = -Kx$$

Questo dà luogo alla equazione differenziale $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ che ammette come soluzione $x(t) = Asin(\omega t)$ con $\omega^2 = \frac{K}{m}$ e quindi $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$.

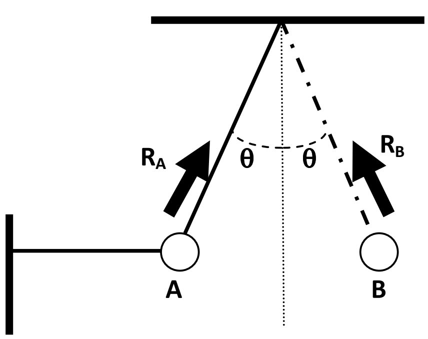
Sostituendo quanto precedentemente determinato si ha:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{mg}{\Delta l}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$

E, quindi, numericamente $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.4}} \cong 0.788Hz$

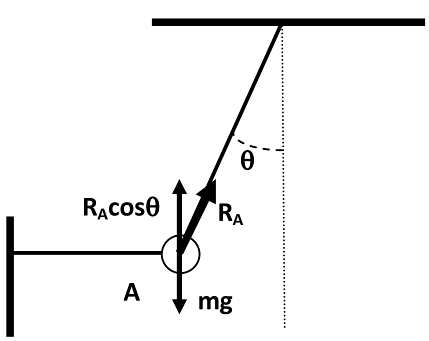
Per quanto riguarda l'accelerazione si ha $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$, ovvero essa è sempre contraria al moto e massima alle estremità, dove si avrà $a_{max} = A\omega^2 = A\frac{K}{m} = A\frac{g}{\Delta l} = 0.2\frac{9.8}{0.4} = 4.9m/sec^2$.

Esempio n°25:



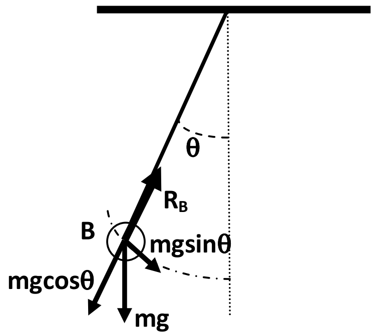
Un pendolo è mantenuto in una posizione di equilibrio **A**, con un angolo **θ=60°**, mediante un filo orizzontale di massa trascurabile. Il filo viene reciso ed il pendolo di mette ad oscillare. Si calcoli il rapporto tra la tensione $\mathbf{R_A}$ prima del taglio e $\mathbf{R_B}$ dopo il taglio.

Prima del taglio si osserva la seguente situazione:



e quindi appare ovvio concludere che $R_A cos\theta = mg$ e di conseguenza $R_A = \frac{mg}{cos\theta}$.

Mentre dopo il taglio la stessa situazione apparirà nel seguente modo:

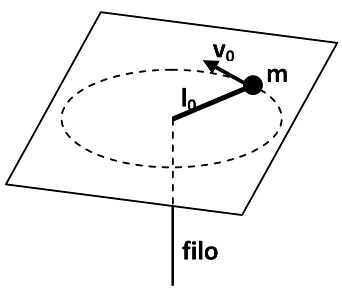


e quindi ora si avrà $R_B = mgcos\theta$.

Il cercato rapporto sarà di conseguenza:

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{mg}{cos\theta}}{mgcos\theta} = \frac{1}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2(60°)} = 4$$

Esempio n°26:



Un punto materiale di massa m=0.2kg attaccato ad un filo di massa trascurabile ruota senza attrito su di un piano orizzontale. La lunghezza del filo che è il raggio della traiettoria circolare è l_0=0.5m e la velocità è v_0=1m/sec. Successivamente si tira il filo e si riduce il raggio a l=0.25m. Si calcoli il lavoro necessario.

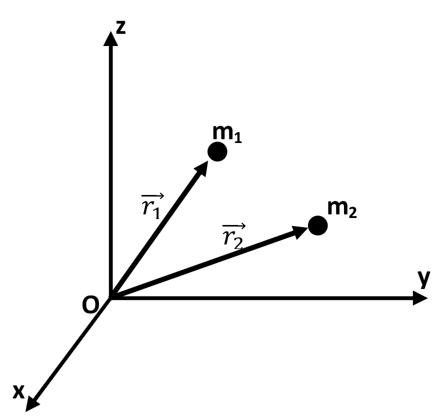
È un classico problema di conservazione del momento angolare o momento della quantità di moto. Quindi $mv_0l_0 = mvl$. Ma si ha anche una variazione di energia cinetica e allora $L = T_f - T_i$.

Allora si può scrivere $v = v_0\frac{l_0}{l}$ e quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{l_0}{l}\right)^2 - 1\right].$$

E numericamente $L = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 1\left[\left(\frac{0.5}{0.25}\right)^2 - 1\right] = 0.3joule.$

6. Sistemi di corpi materiali e Corpo Rigido



Nel caso di sistemi di corpi materiali di masse m_i possiamo continuare a riferirci alle classiche leggi della dinamica purché esse siano riferite al **CENTRO DI MASSA**.

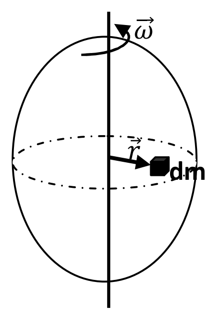
Il centro di massa di un sistema di corpi materiali viene così definito, nelle sue coordinate cartesiane:

$\begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i m_i}{m} \\ y_c = \frac{\sum y_i m_i}{m} \\ z_c = \frac{\sum z_i m_i}{m} \end{cases}$ con $m = \sum m_i$. Ovviamente se siamo nel caso di un corpo costituito da una **distribuzione continua** di massa si avrà: $\begin{cases} x_c = \frac{1}{m}\iiint xdm \\ y_c = \frac{1}{m}\iiint ydm \\ z_c = \frac{1}{m}\iiint zdm \end{cases}$ dove l'integrazione si intende estesa a tutto il volume del corpo.

Una volta definito e determinato il centro di massa si potrà scrivere

$$\vec{F} = \frac{d\overrightarrow{p_c}}{dt}$$

riferendosi ad esso. Quindi se $\vec{F} = 0$ ne consegue *la conservazione della quantità di moto del centro di massa*. Ovviamente $\vec{F}$ è la somma vettoriale di tutte le forze esterne.



Un discorso particolare merita il caso di ***corpo rigido in rotazione***. È chiaro che si deve fare riferimento alla seconda equazione cardinale $\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$ solo che essa va ora riferita all'elemento di massa ***dm***. Quindi $db = \omega r^2 dm$ e, di conseguenza, $b = \omega \int r^2 dm_m$ estendendo l'integrazione a tutto il volume della massa ***m***.

Si passa, allora, a definire il MOMENTO DI INERZIA come:

$$I_a = \left(\int r^2 dm\right)_m = \rho\left(\int r^2 dV\right)_V$$

calcolato rispetto all'asse di rotazione, riferendosi al volume V del corpo dove $\rho = \frac{dm}{dV}$ è la densità. Pertanto la seconda equazione cardinale si scriverà:

$$\vec{M} = I_a \vec{\dot{\omega}} = I_a \vec{\ddot{\varphi}}$$

Si osservi la analogia con:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{s}}$$

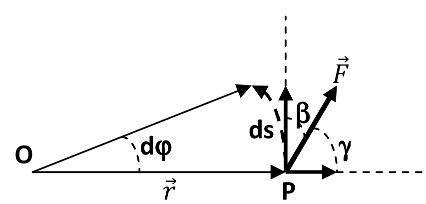
per il caso di moto traslazionale. Si ha, allora, la seguente corrispondenza

traslazione	**rotazione**
$\vec{F}$	$\vec{M}$
m	I
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$

Per l'energia cinetica rotazionale si avrà

$$T = \frac{1}{2}\left(\int v_t^2 dm\right)_m = \frac{1}{2}\omega^2\left(\int r^2 dm\right)_m = \frac{1}{2}I_a\omega^2.$$

Per quanto riguarda il lavoro in un moto rotazionale, osservando la figura, si può scrivere:



$$dL = \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds} = F cos\beta ds = F cos\beta r d\varphi$$

Si osservi che $F cos\beta = F sin\gamma$ e quindi

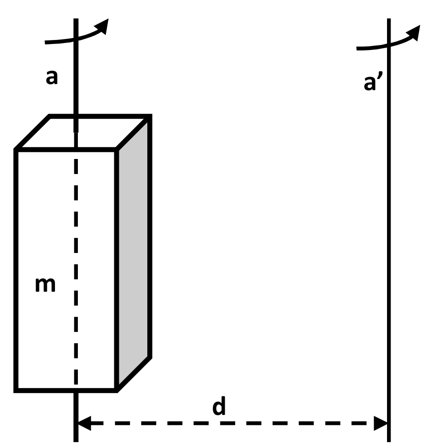
$$dL = F sin\gamma r d\varphi = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| d\varphi = M d\varphi.$$

Allora, in definitiva, si ha $L_{12} = \int_1^2 M(\varphi)d\varphi$.

Si osservi la analogia con il caso lineare in cui $L_{12} = \int_1^2 F(s)ds$.

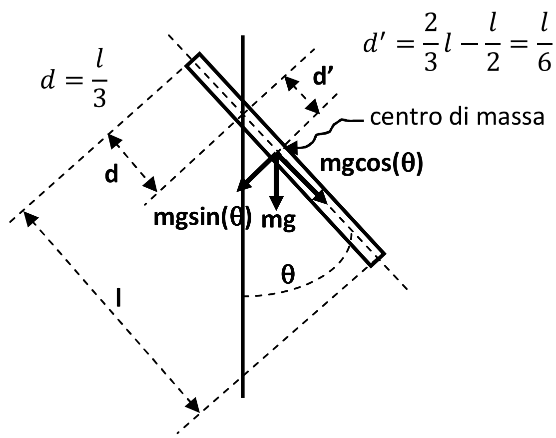
Infine per il momento di inerzia si ricorda anche il teorema di Steiner:

$$\boxed{I'_a = I_a + md^2}$$



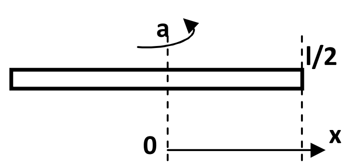
Esempio n°27:

Una barra omogenea di massa ***m=3kg*** è lunga ***30cm*** e presenta una sezione cilindrica costante. Supponendo che essa sia appesa ad un supporto privo di attrito posto ad ***1/3*** della sua lunghezza si determini il periodo delle piccole oscillazioni.



Siamo in presenza di un corpo rigido omogeneo il cui centro di massa è posto sicuramente a metà della sua lunghezza. Poi, come si vede in figura, si indicherà con $d = \frac{l}{3}$ la distanza da un estremo della barretta e il punto di fissaggio; mentre $d' = \frac{l}{6}$ sarà di conseguenza la distanza tra il centro di massa ed il punto di fissaggio.

Si determinerà, inizialmente, il momento di inerzia della barra rispetto ad una asse passante per il centro di massa.



Se si indica con $\boldsymbol{\gamma}$ la densità lineare si può scrivere $dm = \gamma dl$ e passare alla definizione di momento di inerzia.

$$I_{cm} = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dm = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \gamma dl = 2\frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = m\frac{l^2}{12}$$ essendo $\gamma = \frac{m}{l}$.

Adesso si riporta il momento di inerzia relativamente ad un asse di rotazione distante ***d'*** dal centro di massa. Quindi:

$$I_o = I_{cm} + m(d')^2 = m\frac{l^2}{12} + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = m\frac{l^2}{9}$$

Si applica ora la seconda equazione cardinale $\sum M = I\dot{\omega}$ e quindi

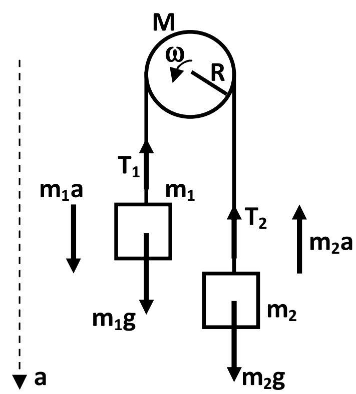
$$-mgsin(\theta)d' = I_0\ddot{\theta}$$

E sostituendo i termini precedentemente trovati, nonché ricordando che, per le piccole oscillazioni, si ha $sin\theta \cong \theta$ si può scrivere

$-mg\theta\frac{l}{6}=m\frac{l^2}{9}\ddot{\theta}$ da cui $\ddot{\theta}+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta=0$. Nella equazione differenziale è noto che $\omega^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$ e quindi $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{0.3}{9.8}}=0.9sec$.

Esempio n°28:

Una puleggia di raggio ***R*** e massa ***M=1kg*** è libera di ruotare senza attrito intorno al suo asse. Su di esso è posto un filo inestensibile che sostiene alle estremità due masse: $\boldsymbol{m_1=5kg}$ e $\boldsymbol{m_2=3kg}$. Lasciando le masse libere si determini il valore della accelerazione di caduta di $\boldsymbol{m_1}$.



Il moto è chiaramente accelerato e la puleggia ruoterà con una accelerazione angolare $\dot{\omega}=\frac{a}{R}$.

Applicando la seconda equazione cardinale alla puleggia si ha:

$$\sum M=(T_1-T_2)R=I_p\dot{\omega}=I_p\frac{a}{R}$$

Ora essendo $I_p=\frac{1}{2}MR^2$ si ha $T_1-T_2=\frac{1}{2}Ma$.

Poi si applica il secondo principio della dinamica alle due masse e si ha:

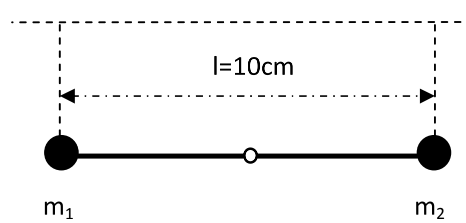
$\begin{cases} m_1a=m_1g-T_1 \\ -m_2a=m_2g-T_2 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} m_1a=m_1g-T_1 \\ m_2a=-m_2g+T_2 \end{cases}$ e sommando le equazioni:

$$m_1a+m_2a=m_1g-m_2g-T_1+T_2$$

Ora sostituendo l'espressione trovata per la puleggia:

$(m_1+m_2)a=(m_1-m_2)g-\frac{1}{2}Ma$ da cui $a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}g$ e, quindi, numericamente $a=\frac{5-3}{5+3+\frac{1}{2}1}9.8=2.3m/sec^2$.

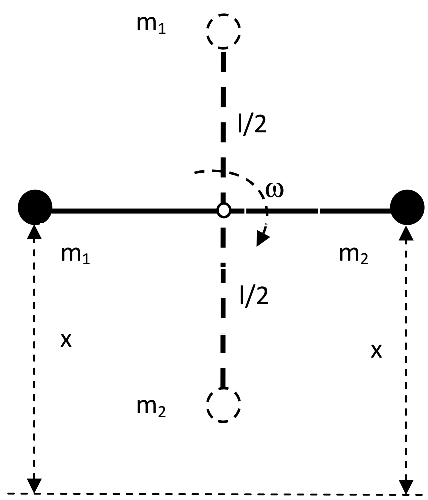
Esempio n°29:



Alle estremità di una barra indeformabile e priva di massa sono poste due masse di valore ***m₁*=100gr** e ***m₂*=200gr**. La barra può ruotare, senza attrito, rispetto ad un perno centrale. Inizialmente essa è bloccata. La si liberi e si calcoli la sua velocità angolare quando passa per la verticale.

Il principio da applicare è certamente quello della conservazione della energia meccanica, principio che può essere scritto come $\Delta T + \Delta U = 0$.

Ora si consideri la seguente schematizzazione supponendo che inizialmente entrambe le masse siano ad una quota x. Si avrà



$$U_1 = -m_1 g x - m_2 g x$$

Dopo ¼ di giro si avrà

$$U_2 = -m_1 g\left(x + \frac{l}{2}\right) - m_2 g\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Ed infine

$$\Delta U = U_1 - U_2 = m_1 g\frac{l}{2} - m_2 g\frac{l}{2}$$

Per quanto riguarda la variazione di energia cinetica, essendo la barra inizialmente ferma, si avrà $\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega^2$.

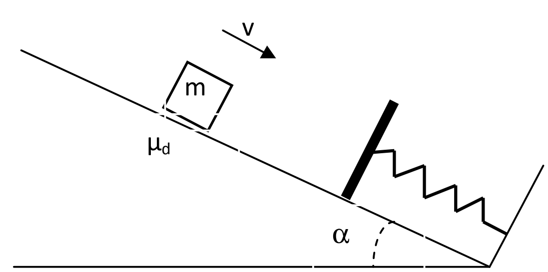
E conservando l'energia, ovvero $\Delta T = -\Delta U$, si avrà

$$(m_1 + m_2)\frac{l^2}{8}\omega^2 = (m_2 - m_1)g\frac{l}{2}$$

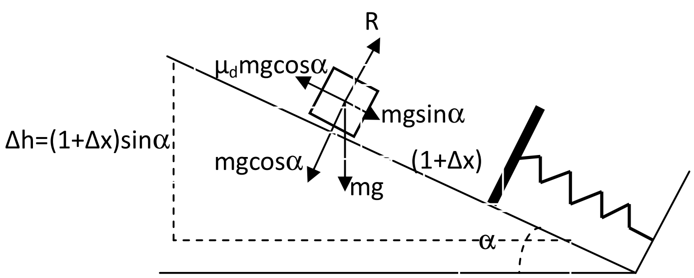
da cui $\omega = 2\sqrt{\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)}\frac{g}{l}} = 2\sqrt{\frac{(200-100)}{(100+200)}\frac{9.8}{0.1}} = 11.43 rad/sec.$

Esempio n°30:

Un corpo di massa m=5kg scivola lungo un piano inclinato con α=30° e coefficiente di attrito μ_d=0.2. Il corpo possiede una velocità (*nella direzione del moto*) in modulo pari a v=1m/sec.



Dopo avere percorso un metro incontra una molla avente K=1000 N/m. Si calcoli la massima compressione della molla.



Il problema può essere risolto sfruttando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica con la presenza di forze non conservative, quindi

$$\sum L_C + \sum L_{NC} = \Delta T$$

Ora nel caso in esame sarà lavoro dovuto a forze conservative la variazione di energia potenziale. La variazione di quota è esprimibile come $\Delta h = (1 + \Delta x)sin\alpha$ essendo Δx la compressione della molla. Quindi si avrà $L'_C = mg(1 + \Delta x)sin\alpha$.

Lavoro conservativo è anche quello relativo alla compressione della molla e pari all'energia elastica in essa immagazzinata. Tale lavoro è però contrario al moto. Quindi $L''_C = -\frac{1}{2}K(\Delta x)^2$.

Il lavoro non conservativo sarà solo quello dovuto all'attrito che esercita una azione frenante. Pertanto $L_{NC} = -\mu_d mgcos\alpha(1 + \Delta x)$.

Per quanto riguarda la variazione di energia cinetica si può scrivere $\Delta T = T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2}mv^2$.

Allora il bilancio energetico si scriverà

$$mg(1 + \Delta x)sin\alpha - \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - \mu_d mgcos\alpha(1 + \Delta x) = -\frac{1}{2}mv^2$$

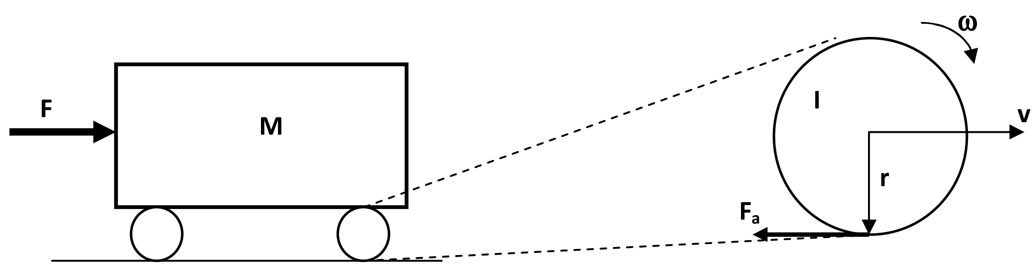
Sostituendo tutti i valori numerici si giunge alla seguente equazione nella incognita Δx:

$$500\Delta x^2 - 16\Delta x - 18.5 = 0$$

Risolvendola (*considerando la sola soluzione positiva*) si ha $\Delta x = \frac{16+\sqrt{256+37000}}{1000} = 0.21m$.

Esempio n°31:

Un vagone ferroviario è dotato di quattro ruote e ha una massa totale **M=300kg**. Sia **I=4kgm²** il momento di inerzia di ogni singola ruota calcolato intorno al proprio asse e **r=40cm** è il raggio delle ruote. Se il vagone è spinto lungo una rotaia da una forza orizzontale e costante **F=100N** e non vi sono slittamenti, trovare il valore della sua accelerazione.



Adottiamo la schematizzazione illustrata qui sopra. A sinistra osserviamo il carro ferroviario soggetto alla forza esterna **F**, a destra il dettaglio del moto di **puro rotolamento** della singola ruota; tale moto si spiega con la presenza di una forza di attrito $\mathbf{F_a}$ che agisce al contatto tra ruota e suolo impedendo lo slittamento.

Quindi, in applicazione del secondo principio della dinamica, si ha $\sum F_e = Ma$ e riferendoci al nostro centro di massa

$$F - 4F_a = Ma$$

Se ora si prende in considerazione la singola ruota è possibile applicare alla rotazione la seconda equazione cardinale. Quindi si scrive $\sum M_e = I\dot{\omega}$. Applicandola al caso in esame si ha

$$F_a r = I\frac{a}{r}$$

Pertanto $F_a = I\frac{a}{r^2}$. E sostituendo $F - 4I\frac{a}{r^2} = Ma$ da cui si ricava che

$$a = \frac{F}{M+4\frac{I}{r^2}} = \frac{100}{300+4\frac{4}{(0.4)^2}} = 0.25m/sec^2.$$

Esempio n°32:

Un proiettile, non soggetto ad alcuna forza, sta percorrendo una traiettoria diretta su un bersaglio alla velocità v=1000m/sec. A 3km dal bersaglio si divide in due frammenti A e B di massa $m_A=2m_B$. Sapendo che A si ferma istantaneamente si chiede di determinare se B arriverà lo stesso sul bersaglio e, in caso affermativo, calcolare il tempo necessario.

Essendo $\sum F_e = 0$ è evidente che sarà $\frac{dp}{dt} = 0$, quindi è un problema di conservazione della quantità di moto. Allora si scriverà

$$(m_A + m_B)\vec{v} = m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B}$$

Ma istantaneamente si ha $v_A = 0$ e allora si deduce subito che

$$vers(\vec{v}) = vers(\overrightarrow{v_B})$$

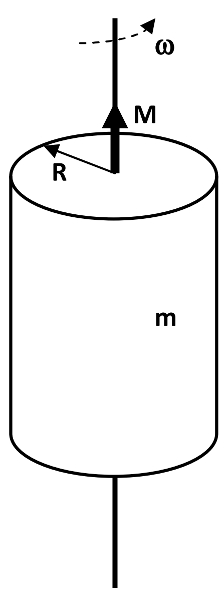
e il proiettile continuerà nella stessa direzione e giungerà sul bersaglio, ma lo farà con una velocità

$$v_B = \left(\frac{m_A}{m_B} + 1\right) v = \left(\frac{2m_B}{m_B} + 1\right) v = 3v = 3000m/sec.$$

Quindi giungerà sul bersaglio dopo un tempo $t = \frac{3000m}{v_B} = 1sec.$

Esempio n°33:

Un cilindro omogeneo di massa **m=3kg** e raggio **R=40cm** ruota con attrito attorno al suo asse. Supponendo costante la coppia frenante, calcolarne il valore sapendo che con una velocità angolare di **3rad/sec** il cilindro si arresta dopo avere compiuto un giro e mezzo.



Il problema può essere risolto ricordando che

$$\sum L_C + \sum L_{NC} = T_2 - T_1.$$

Nel caso in esame L_C=0 quindi ci saranno solo forze non conservative (il momento frenante) ad opporsi al moto.

Quindi si scriverà

$$L_{NC} = -\int_0^{\alpha_f} M d\alpha = -M\alpha_f$$

dove **M** è la coppia frenante e α_f è pari a **3π** radianti (*ovvero un giro e mezzo*).

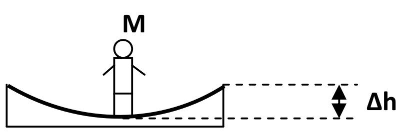
Per quanto concerne l'energia cinetica $T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2} I\omega^2$ con $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Sostituendo il tutto $-M\alpha_f = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\omega^2$ da cui si può ricavare

$$M = \frac{1}{4}\frac{mR^2\omega^2}{\alpha_f} = \frac{1}{4}\frac{3(0.4)^2(3)^2}{3\pi} = 0.1146Nm.$$

Esempio n°34:

Un uomo di massa **M=70kg** si trova al centro di uno stagno ghiacciato supposto perfettamente liscio. La quota del bordo dello stagno è **10cm** più alta di quella del centro. Per uscire dallo stagno egli lancia orizzontalmente una massa **m=2kg**. Quale deve essere la velocità minima di tale massa perché egli raggiunga l'orlo dello stagno?



Si consideri la schematizzazione del problema indicata in figura e si osservi che nello stato di quiete non agiscono forze esterne. Il problema conserva la quantità di moto, quindi $0 = v_M - mv_m$ essendo le direzioni di moto opposte.

Allora la velocità della massa lanciata sarà $v_m = \frac{M}{m} v_M$.

Però l'uomo dovrà raggiungere il bordo e lì fermarsi. Ecco che il problema applica anche la conservazione dell'energia meccanica e allora

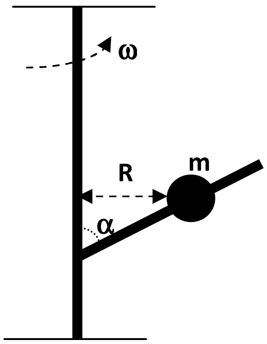
$$\frac{1}{2} Mv_M^2 = Mg\Delta h.$$

E si può ricavare $v_M = \sqrt{2g\Delta h}$. Sostituendo nella espressione per la velocità dell'oggetto lanciato

$$v_m = \frac{M}{m}\sqrt{2g\Delta h} = \frac{70}{2}\sqrt{2(9.8)(0.1)} = 49m/sec.$$

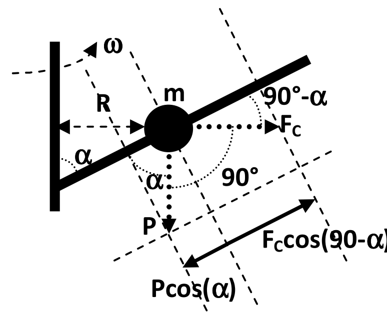
Esempio n°35:

Su un'asta verticale girevole è fissata rigidamente un'asta obliqua, che forma un angolo α=68° con la verticale, sulla quale scorre senza attrito



un corpo di dimensioni trascurabili e massa m. Si chiede, noto che R=1m, di determinare per quale velocità angolare la massa è in equilibrio.

È evidente che la schematizzazione del sistema è quella indicata nella figura, quindi **R** è il raggio della traiettoria circolare che la massa **m** compie nella situazione di equilibrio. Ovviamente l'asta obliqua è quella girevole.



Non essendo coinvolti attriti le uniche forze agenti sulla massa sono la forza peso e la forza centrifuga. Pertanto è possibile tracciare la schematizzazione a lato.

È evidente che F_C sarà perpendicolare alla forza peso P=mg. Così come è altrettanto evidente che, perché la massa sia ferma, dovranno farsi equilibrio le componenti di tali forze lungo l'asta obliqua.

Allora si può scrivere

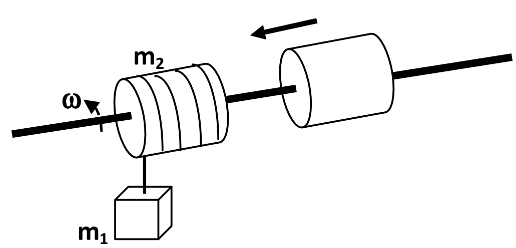
$$mgcos(\alpha) = m\omega^2 Rcos(90-\alpha) = m\omega^2 Rsin(\alpha).$$

È ovvio ricavare che

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\cot(\alpha)} = \sqrt{\frac{9.8}{1}\cot(68°)} = 2rad/sec.$$

Esempio n°36:

Un cilindro omogeneo di massa **m_2=5kg** e raggio **r** può ruotare senza attrito intorno ad un asse passante per il suo asse di simmetria. Su tale cilindro sono avvolti **l=10m** di filo inestensibile e di massa trascurabile. Ad una estremità del filo è legato un corpo di massa **m_1=5kg**. Il tutto è in quiete e ad un certo istante si libera m_1 che cadrà sotto l'azione della gravità srotolando tutto il filo. A questo punto un secondo cilindro identico al primo



scivola sull'asse e si salda istantaneamente al primo. Si calcoli il lavoro compiuto dalle forze interne all'atto dell'unione dei due cilindri.

È utile osservare che la prima parte del problema, ovvero la determinazione della velocità angolare del primo cilindro, può essere affrontata in termini energetici o con l'uso della seconda equazione cardinale. Si farà vedere che, in entrambi i casi, il risultato sarà lo stesso.

In termini squisitamente energetici siamo in un campo conservativo e la caduta della massa $\mathbf{m_1}$, a seguito dello srotolamento della corda di lunghezza **l**, comporta una variazione di energia potenziale quantificabile come $\Delta U = U_1 - U_2 = m_1 g x - m_1 g(x-l) = m_1 g l$.

Tale variazione di energia potenziale sarà trasformata in energia cinetica, quindi

$$m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m_1 (\omega R)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_2 R^2 \omega^2.$$

Da cui è ovvio ricavare $\omega^2 = \frac{4 m_1 g l}{(2m_1 + m_2)R^2}$.

Al contatto dei due cilindri possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare e scrivere

$$I\omega = 2I\omega_f.$$

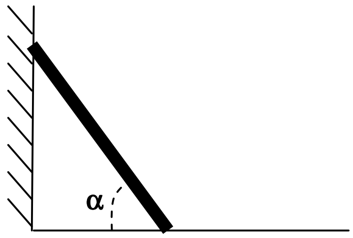
Pertanto si avrà $\omega_f = \frac{\omega}{2}$. È evidente che il lavoro delle forze interne sarà un lavoro frenante che provocherà il dimezzamento della velocità angolare, quindi

$$L_i = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} 2I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega^2 = I\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right] = -\frac{1}{4} I\omega^2.$$

E sostituendo l'espressione prima trovata per la velocità angolare si ha $L_i = -\frac{1}{4} I \frac{4 m_1 g l}{(2m_1 + m_2)R^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{4 m_1 g l}{(2m_1 + m_2)R^2} = -\frac{1}{2} m_2 \frac{m_1 g l}{(2m_1 + m_2)} =$
$-\frac{1}{2} 5 \frac{5(9.8)10}{15} = -81.6 joule.$

Esempio n°37:

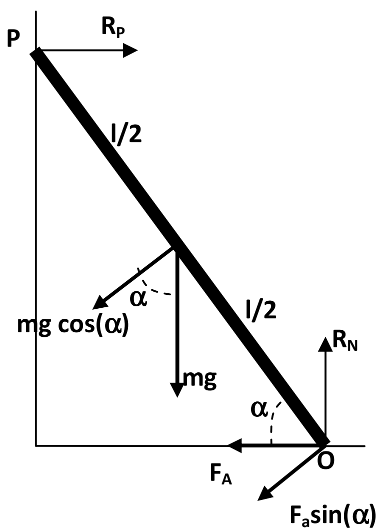
Una scala è poggiata su una parete come visibile nella figura seguente.



Essa forma un angolo **α** con il pavimento. Quest'ultimo presenta un coefficiente di attrito statico **μ=0.5**. La massa della scala vale **m=20kg**.

Si chiede di determinare l'angolo limite per cui non si abbia lo scivolamento della scala.

Si tratta, evidentemente di un problema di statica. È conveniente, quindi, analizzare le forze agenti.



Appare evidente che la scala è soggetta alla forza peso applicata nel suo centro di massa (punto a distanza l/2 dagli estremi P e O). Ovviamente sarà:

$R_N = mg$ e $F_a = \mu R_N = \mu mg$.

Perché la scala non cada deve essere nulla la sommatoria di tutti i momenti agenti su di essa. Momenti che tenderebbero, altrimenti, a farla ruotare intorno al punto P.

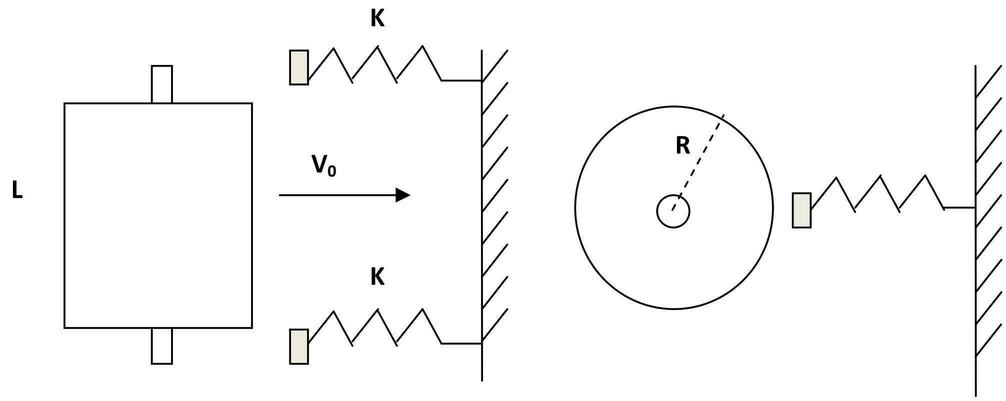
Le forze a cui sono imputabili i momenti sono le componenti del peso e dell'attrito ortogonali alla scala. Quindi si potrà scrivere che, perché la scala non cada, deve essere:

$$mgcos(\alpha)\frac{l}{2} \leq \mu mgsin(\alpha)l$$

In definitiva $\tan(\alpha) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{\mu} = 1$, quindi l'angolo limite è 45°.

Esempio n°38:

Un cilindro pieno di raggio **R=20cm** e massa **M=20kg** rotola, senza strisciare, con velocità costante **v_0=5m/sec** verso due molle ideali identiche con **k=1.87*10⁴ N/m** assemblate come visibile nelle figure. Il cilindro, ovviamente, comprimerà le molle e sarà momentaneamente arrestato. Quindi l'espansione delle molle porrà nuovamente in moto il cilindro. Per tale sistema si chiede di:



1. Determinare la massima compressione delle molle Δx_{max};
2. Determinare il tempo necessario all'arresto del cilindro a partire dall'istante di contatto con le molle.

Siamo in presenza di un moto roto-traslatorio. Quindi il cilindro possiede una energia cinetica che è manifesta sia nella componente traslatoria che in quella rotatoria. Quando avverrà la massima compressione delle molle questa energia cinetica sarà tutta trasformata in energia elastica. Pertanto:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 2\left(\frac{1}{2}k\Delta x^2\right)$$

Ricordando che, per il cilindro, si ha $I = \frac{1}{2}MR^2$ e che $\omega = \frac{v}{r}$ si ha

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = k\Delta x^2$$

da cui

$$\frac{3}{4}Mv_0^2 = k\Delta x^2$$

Ora si può determinare la compressione

$$\Delta x = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{60}{18700}} \cong 14.16cm$$

Per rispondere al secondo quesito si deve scrivere l'espressione della distribuzione dell'energia nella fase intermedia tra il contatto del cilindro ed il suo completo arresto. In tale situazione si ha

$$\frac{3}{4}Mv_0^2 = \frac{3}{4}Mv(t)^2 + kx(t)^2$$

Ora derivando tale espressione rispetto al tempo si ha

$$0 = \frac{3}{2}M\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + 2kx(t)\dot{x}(t)$$

da cui

$$\ddot{x}(t) + \frac{4}{3}\frac{k}{M}\dot{x}(t) = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un moto armonico con $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{3M}}$. Quindi il punto di arresto (massima compressione) si avrà dopo un quarto del periodo. Allora

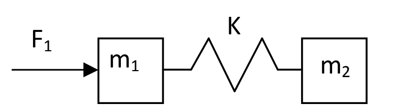
$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{k}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{60}{18700}} \cong 0.0445sec$$

Esempio n°39:

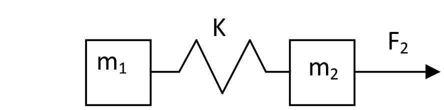
Due masse **m_1=10kg** e **m_2=18kg** sono posti sopra un piano e connesse da una molla ideale, priva di massa e con costante elastica **k=10N/m**.

Si considerino le seguenti due situazioni:

a) Il corpo di massa **m_1** è spinto da una forza **F_1=56N**



b) Il corpo di massa **m_2** è trascinato da una forza **F_2**



Nel caso a) si chiede di determinare la compressione della molla. Nel caso b) si chiede di calcolare l'accelerazione ed il modulo di F_2 ipotizzando un allungamento della molla pari alla compressione del primo caso. Infine, sempre nella situazione del caso b) e con un identico valore di F_2, si chiede di valutare l'allungamento della molla in presenza di attrito dinamico con **μ_D=0.2**.

Nel caso a) ponendosi nella condizione di regime, il sistema si muove di moto accelerato con accelerazione **a_a**. Pertanto si ha $(m_1 + m_2)a_a = F_1$ da cui $a_a = \frac{F_1}{(m_1+m_2)}$. Ora sulla massa m₂ agisce la forza di compressione dovuta alla molla, pertanto si ha $m_2 a_a = k\Delta x$ e quindi $\Delta x = \frac{m_2}{k} a_a$ da cui

$$\Delta x = \frac{m_2}{k}\frac{F_1}{(m_1+m_2)} = \frac{18}{10}\frac{56}{(10+18)} \cong 3.6m$$

Nel caso b), sempre a regime, si ha $(m_1+m_2)a_b = F_2$ con identico allungamento. Quindi $m_1 a_b = k\Delta x$ da cui si ha

$$F_2 = (m_1+m_2)\frac{k\Delta x}{m_1} = (10+18)\frac{10 \cdot 3.6}{10} \cong 100.8N$$

Nella situazione di presenza di attrito si scriverà

$$(m_1+m_2)a_c = F_2 - \mu_D m_1 g - \mu_D m_2 g$$

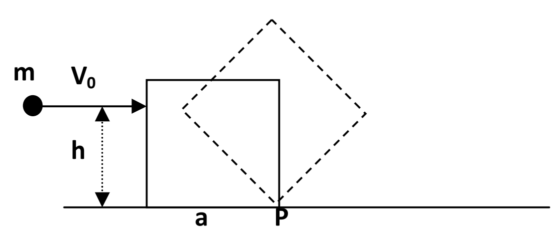
da cui si ha $a_c = \frac{F_2}{(m_1+m_2)} - \mu_D g$ con la stessa forza del punto b). Ora per il corpo di massa m_1 si ha $m_1 a_c = k\Delta x_c - \mu_D m_1 g$. Sostituendo l'accelerazione $m_1\left(\frac{F_2}{(m_1+m_2)} - \mu_D g\right) = k\Delta x_c - \mu_D m_1 g$ e quindi

$$\Delta x_c = \frac{m_1}{k}\frac{F_2}{(m_1+m_2)} = \Delta x$$

Non cambia rispetto al caso di assenza di attrito.

Esempio n°40:

Un cubo di massa **M=100kg** e lato **a=50cm** è posto a riposo su di un piano orizzontale. Un proiettile di massa **m=100g** si conficca istantaneamente alla quota **h=45cm**. Sapendo che il momento di inerzia del cubo, riferito ad un asse passante per il suo centro, vale $I = \frac{1}{6}Ma^2$ si determini il valore della velocità **v₀** del proiettile perché il cubo si ribalti.



È evidente che per avere il ribaltamento il cubo deve effettuare una rotazione intorno allo spigolo indicato nel punto **P** della figura.

Ovviamente perché si inneschi il processo di ribaltamento è necessario che si compia una rotazione di almeno 45°.

Nella rotazione si deve avere la conservazione del momento angolare calcolato rispetto al punto **P**. Quindi

$$mv_0h = m(a^2 + h^2)\omega_P + I_P\omega_P$$

dove il termine $m(a^2 + h^2)$ è il momento di inerzia del proiettile subito dopo l'impatto e $I_P = \frac{1}{6}Ma^2 + M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{2}{3}Ma^2$ è il momento di inerzia del cubo per un asse passante per il punto **P**.

Allora si ha

$$\omega_P = \frac{mv_0h}{m(a^2 + h^2) + \frac{2}{3}Ma^2} \cong \frac{3mv_0h}{2Ma^2}$$

avendo trascurato la massa del proiettile rispetto a quella del cubo.

Adesso si deve imporre la rotazione, quindi l'energia cinetica rotazionale deve essere tale superare la differenza di energia potenziale che subisce il cubo per una rotazione di almeno 45°. Possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}I_P\omega^2 > U_{45^0} - U_0 = Mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{a}{2}\right) = Mg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}Ma^2\omega^2 > Mg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)$$

$$\omega > \sqrt{\frac{3g}{a}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}$$

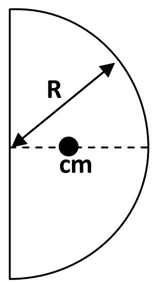
Usando l'espressione prima trovata

$$\frac{3mv_0h}{2Ma^2} > \sqrt{\frac{3g}{a}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}$$

$$v_0 > \frac{Ma^2}{mh}\sqrt{\frac{2g}{a}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)} = \frac{100(0.5)^2}{0.1(0.45)}\sqrt{\frac{2(9.8)}{0.5}\frac{\sqrt{2}-1}{3}} \cong 1162.9m/s$$

Esempio n°41:

Un cilindro pieno di raggio **R=20cm**, lungo e di massa **M** è diviso in due metà. In figura è illustrata una delle due metà. Per essa si chiede di:

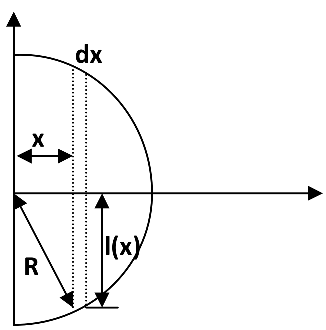


a) Determinare la distanza $\mathbf{d_{cm}}$ del nuovo centro di massa calcolata a partire dall'asse originario.

b) Calcolare il momento di inerzia del semicilindro per un asse passante per il nuovo centro di massa.

c) La velocità angolare massima ω_{max} supponendo di lasciarlo rotolare senza scivolamento.

Per rispondere al primo quesito si deve considerare la figura visibile di seguito.



Scelto un opportuno sistema di riferimento, come si vede di lato, è ovvio che il nuovo centro di massa deve stare su un asse perpendicolare all'asse **x** e distante $\mathbf{d_{cm}}$ (*misurata sull'asse* x) dal vecchio asse del cilindro intero. Allora, considerando una fettina del semicilindro di spessore **dx**, si osserva che $l(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e, quindi, la massa di questa fettina di semicilindro sarà $dm = 2\rho l(x)Ldx$ dove ρ è la densità di massa del semicilindro. Tale densità è, ovviamente, $\rho = \frac{M}{V}$ con $V = \frac{\pi}{2}R^2L$. Allora si ha $\rho = \frac{2M}{\pi R^2 L}$ e sostituendo si ottiene l'espressione finale dell'elemento di massa $dm = \frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}dx$.

Ora, ricordando la definizione delle coordinate del centro di massa, si deve avere

$$d_{cm} = \frac{1}{M}\left(\int xdm\right)_V = \frac{1}{M}\int_0^R x\frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

Risolvendo l'integrale[1] si ha $d_{cm} = \frac{4R}{3\pi}$.

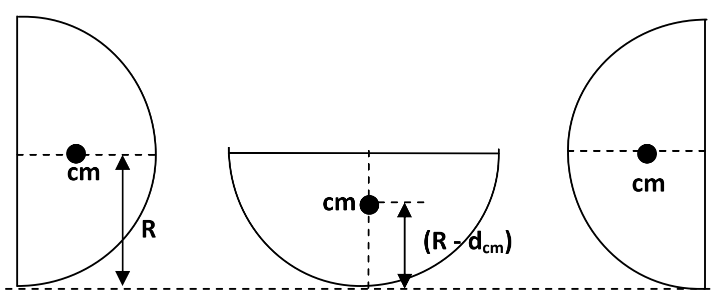
Per determinare il momento di inerzia riferito al nuovo centro di massa si può osservare che, per ragioni di simmetria, il momento di inerzia di un semicilindro rispetto all'asse ordinario del cilindro deve essere $I_0 = \frac{1}{4}MR^2$. Ora, applicando il teorema degli assi paralleli al semicilindro, si ha

$$I_0 = I_{cm} + M(d_{cm})^2$$

pertanto

$$I_{cm} = I_0 - M(d_{cm})^2 = \frac{1}{4}MR^2 - M\frac{16R^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}MR^2$$

Per rispondere all'ultimo quesito si osservi la figura seguente che illustra le posizioni del rotolamento. È facile notare che, in assenza di scivolamento ed in assenza di attrito, il semicilindro compirà un movimento oscillatorio. In particolare il centro di massa effettuerà un moto rotatorio la cui massima velocità angolare si avrà con il semicilindro in posizione orizzontale. Chiaramente dovrà valere la conservazione dell'energia, infatti il centro di massa del cilindro subisce una variazione di quota $\Delta h = R - (R - d_{cm}) = d_{cm}$ e pertanto si ha



$$\frac{1}{2}I_P\omega_{max}^2 = Mgd_{cm}$$

[1] Per la soluzione dell'integrale $d_{cm} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx$ si può procedere come qui indicato: $d_{cm} = \frac{-2}{\pi R^2}\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}d\left(R^2 - x^2\right) = \frac{-2}{\pi R^2}\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^R =$ $\frac{-4}{3\pi R^2}\left[0 - R^3\right] = \frac{4R}{3\pi}$.

In tale espressione I_P è il momento di inerzia del semicilindro che ruota ora intorno al punto di contatto. Quindi

$$I_P = I_{cm} + M(R - d_{cm})^2 = \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}MR^2 + M\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)^2$$
$$= \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2}MR^2 + \frac{3\pi - 4}{3\pi}MR^2 = \frac{45\pi^2 - 48\pi - 64}{36\pi^2}MR^2$$

E sostituendo nella precedente espressione si ha

$$\frac{1}{2}\frac{45\pi^2 - 48\pi - 64}{36\pi^2}MR^2\omega_{max}^2 = Mgd_{cm}$$

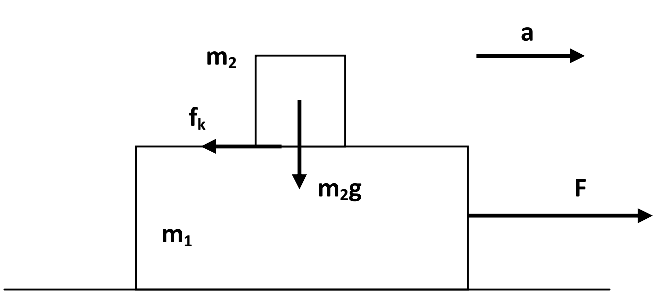
Da cui $\omega_{max} = \frac{6\pi}{R}\sqrt{\frac{2gd_{cm}}{45\pi^2 - 48\pi - 64}}$.

Esempio n°42:

Un corpo di massa m_1=20kg è posto sopra un piano privo di attrito. Su tale corpo è posizionato, come in figura, un secondo corpo di massa m_2=3kg. Tra i due corpi le superfici sono scabre e presentano un coefficiente di attrito statico μ_S=0.7 e un coefficiente di attrito dinamico μ_D=0.4. Si supponga di applicare una forza F e trainare il corpo di massa maggiore. Per tale situazione si chiede di

a) Trovare il valore di F_{max} perché il corpo più piccolo si muova restando solidale con il più grande;
b) Trovare le accelerazioni dei due corpi se si applica $F=2F_{max}$.

Per il primo punto si può schematizzare la situazione nel seguente modo



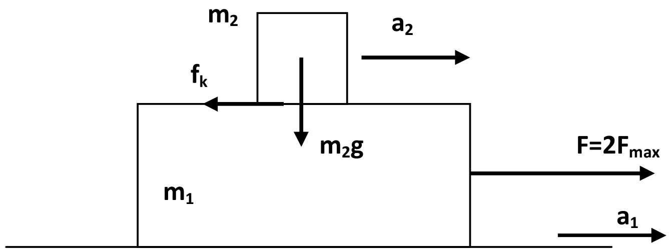
e se il moto deve avvenire tutto solidalmente si potrà scrivere

$$F = (m_1 + m_2)a$$

Inoltre, perché il secondo corpo non si sposti, deve essere

$m_2 a < f_k$ con $f_k = \mu_S m_2 g$. Quindi avremo $a < \mu_S g$ e la forza massima sarà $F_{max} = (m_1 + m_2)\mu_S g = (20 + 3)(0.7)(9.8) \cong 157.78N$

Per il secondo punto si può schematizzare come segue.



Allora, per il corpo più piccolo, si scrive

$$m_2 a_2 = \mu_D m_2 g$$

e allora tale corpo si muoverà con accelerazione $a_2 = \mu_D g = (0.4)(9.8) = 3.92 m/sec^2$.

Per il corpo più grande si scriverà

$$m_1 a_1 = 2F_{max} - f_k = 2(m_1 + m_2)\mu_S g - \mu_D m_2 g$$

E quindi

$$a_1 = \frac{2(m_1+m_2)\mu_S g - \mu_D m_2 g}{m_1} = \frac{2(157.78)-(0.4)(3)(9.8)}{20} = 15.19 m/sec^2.$$