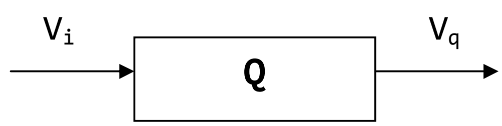
1. *Definizione del rumore di quantizzazione*

Il processo di quantizzazione dei campioni di un segnale analogico per la successiva codifica in binario contiene una intrinseca fonte di errore. Infatti l'operazione di quantizzazione nasce dalla necessità di dovere rappresentare un insieme di valori infiniti, anche se limitati, con una rappresentazione ad un numero finito di valori (il codice binario). È evidente l'approssimazione.

Se si considera un segnale sinusoidale di ampiezza **A** è noto che esso può assume tutti gli infiniti valori compresi nell'intervallo **[A,-A]**. Quindi anche i campioni di tale segnale potranno assume valori nel medesimo intervallo. Ma i campioni dovranno essere codificati a **n** bit, quindi i possibili valori sono $\boldsymbol{L = 2^n}$ ovvero in numero finito.

Si consideri la seguente schematizzazione di un quantizzatore,

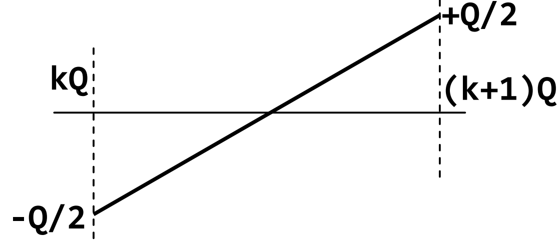


dove $\mathbf{V_i}$ rappresenta il generico campione del segnale sinusoidale sopra citato e $\mathbf{V_q}$ è il corrispondente valore quantizzato. Appare ovvio che dovrà essere $\boldsymbol{V_i = V_q + \varepsilon}$ dove ε è l'errore di quantizzazione.

Come dovrebbe essere noto dalla teoria dei convertitori analogico – digitali l'errore di quantizzazione risulterà limitato nell'intervallo $\boldsymbol{\varepsilon} \in [-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}]$ se si scelgono le soglie a metà degli intervalli di quantizzazione e posto che $\boldsymbol{Q = \frac{2V_{max}}{L} = \frac{2V_{max}}{2^n}}$. $\mathbf{V_{max}}$ è la massima ampiezza ammessa dal convertitore.

2. *Potenza del rumore di quantizzazione*

Se consideriamo la variazione dell'errore di quantizzazione come detto precedentemente è possibile affermare che l'andamento del rumore di quantizzazione, nel k-esimo intervallo di quantizzazione, risulta essere il seguente:



L'andamento del rumore di quantizzazione è ovviamente lineare nel generico intervallo di quantizzazione ed anche la sua distribuzione di probabilità è uniforme nel generico intervallo. Quindi si ha che $\boldsymbol{P(\varepsilon) = \frac{1}{Q}}\ \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in [-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}]$.

È possibile calcolare la potenza del rumore di quantizzazione come:

$$\boldsymbol{N_q = \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^2 P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{1}{Q} \left[\frac{\varepsilon^3}{3}\right]_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} = \frac{Q^2}{12}},$$

pertanto il valore efficace del rumore di quantizzazione è calcolabile come $\boldsymbol{\varepsilon_{eff} = \sqrt{N_q} = \frac{Q}{2\sqrt{3}}}$.

3. *Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione*

Per determinare una espressione per il rapporto segnale-rumore nel processo di quantizzazione e quindi valida per il dimensionamento di sistemi **PCM** si può supporre di utilizzare come segnale una sinusoide di ampiezza $\mathbf{A=V_{max}}$, così da fare lavorare il quantizzatore a piena scala.

Per il segnale si avrà $\boldsymbol{S_{eff} = \left(\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{V_{max}^2}{2}}$. Mentre per il rumore di quantizzazione $\boldsymbol{N_{eff} = N_q = \frac{Q^2}{12}}$. Pertanto si avrà

$$\boldsymbol{\frac{S_{eff}}{N_{eff}} = \frac{\frac{V_{max}^2}{2}}{\frac{Q^2}{12}} = \frac{\frac{V_{max}^2}{2}}{\frac{\left(\frac{2V_{max}}{L}\right)^2}{12}} = \frac{3}{2} L^2}.$$

A questo punto passando ai decibel e ricordando che $\boldsymbol{L = 2^n}$ si ha

$$\left(\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{N_q}}\right)_{\boldsymbol{dB}} = 10log\left(\frac{S_{eff}}{N_{eff}}\right) = 10log\left(\frac{3}{2}L^2\right) = 10log\left(\frac{3}{2}\right) + 20nlog2 \cong \boldsymbol{6n + 1.76}$$

****