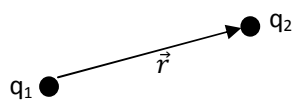


Corso di Fisica Generale
Esercitazioni
(*ELETTROMAGNETISMO*)

A cura di B. Preite

1. Forza Elettrica

Si ricorda che considerando due cariche puntiformi nel vuoto, q_1 e q_2 , è possibile esprimere la forza agente tra loro con la nota relazione di Coulomb:

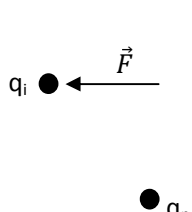


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

dove \vec{r} è il vettore congiungente le cariche e $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} C^2 / Nm^2$ è la

costante dielettrica del vuoto. Ovviamente la forza elettrica sarà repulsiva se le due cariche sono dello stesso segno; repulsiva in caso contrario.

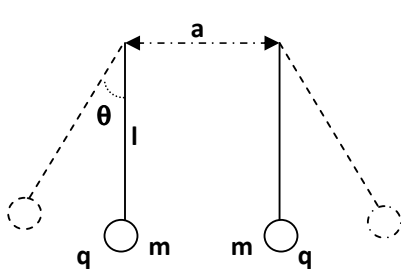
Nel caso si consideri una configurazione di cariche, come indicato di seguito



e si vuole conoscere la forza elettrica agente sulla generica carica q_i vale il principio di sovrapposizione. Quindi $\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$.

Esempio E1:

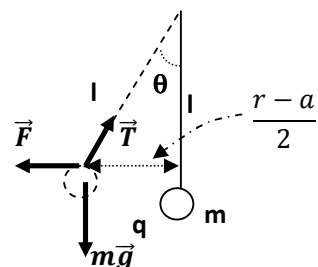
Due fili di seta sostengono due palline di massa m . Esse sono inizialmente scariche e vengono caricate con la stessa carica q . Allora deviano dalla verticale di un angolo θ . Noto il valore di tale angolo si determini la carica q .



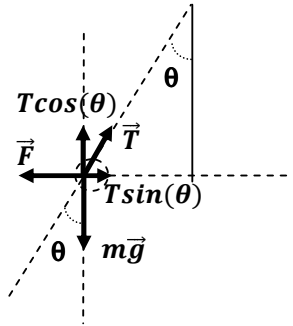
Osservando la figura a lato possiamo chiamare l la lunghezza del filo di seta e a la distanza tra i punti di sospensione dei fili.

Inoltre indicheremo con r la distanza tra le palline cariche. Osserviamo, quindi, la

situazione di equilibrio di una singola pallina. Da essa è immediato ricavare una espressione analitica per l'angolo, ovvero $\tan(\theta) = \frac{r-a}{2l}$.



Mentre se si esaminano nel dettaglio le forze agenti (e le loro componenti) si ha $T \cos(\theta) = mg$ da cui si ricava $T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$. Ora per le



componenti orizzontali si può scrivere

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = T \sin(\theta).$$

Sostituendo l'espressione di T si ha

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = mg \frac{r-a}{2l}.$$

Da tale ultima espressione si può facilmente

ricavare il valore della carica $q = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 mgr^2(r-a)}{l}}$.

2. Campo Elettrico

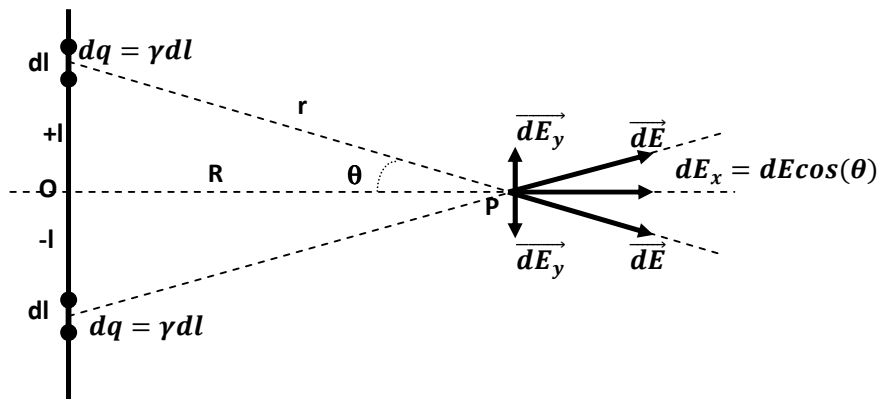
È noto che una disposizione qualunque di cariche elettriche nello spazio genera una perturbazione dello spazio stesso, che si manifesta nella forza elettrica sulla carica esploratrice q . Pertanto si può scrivere $\vec{F} = q\vec{E}$ e definire il campo elettrico come $\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$. Si potrà, allora, scrivere

- per una carica: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$;
- per una distribuzione di cariche: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}$.

Esempio E2:

Si determini l'andamento del campo elettrico generato da una linea retta carica in modo uniforme con densità lineare di carica γ ($[\gamma] = [C/m]$).

Schematizziamo il problema.



Dividendo la linea in due semirette rispetto ad un punto di simmetria O , si può osservare che due generici tratti elementari di linea (dl) simmetrici rispetto a O danno luogo ad un campo diretto solo ortogonalmente alla linea (dE_x). Infatti tutte le componenti parallele alla linea (dE_y) di annullano a due a due. Quindi il campo elettrico generato da una linea carica uniformemente è solo perpendicolare alla linea stessa.

Proviamo, quindi, a determinarne il modulo nel generico punto P a distanza R dalla linea. Possiamo scrivere (si osservi la figura)

$$E_x = \int dE_{xL} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{r^2} \cos(\theta).$$

Scegliendo come variabile l'angolo θ che varierà nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si può scrivere

- $r = \frac{R}{\cos(\theta)}$
- $l = R \tan(\theta)$ da cui $dl = \frac{R}{\cos^2(\theta)} d\theta$.

Operando la sostituzione

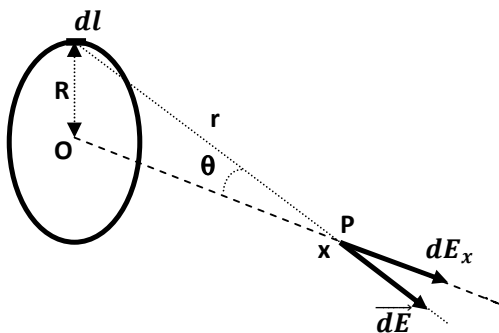
$$E = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{R}{\cos^2(\theta)} d\theta}{\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} \cos(\theta) = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Il campo decresce come $\frac{1}{x}$ se x è la distanza dalla linea.

Esempio E3:

Un anello è carico uniformemente con una carica Q . Noto che l'anello ha raggio R si trovi il campo generato a distanza x dal centro dell'anello.

Schematizziamo il problema.



È evidente che la densità lineare di carica può essere scritta come $\gamma = \frac{Q}{2\pi R}$ e l'elemento dl conterrà una carica $dq = \gamma dl$.

Ancora una volta, per evidente simmetria, che il campo sarà solo perpendicolare al piano della circonferenza. Di conseguenza l'elemento dl produrrà un campo $dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma dl}{r^2} \cos(\theta)$.

Osservando la figura si può dedurre che $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$ e quindi integrare lungo l'anello:

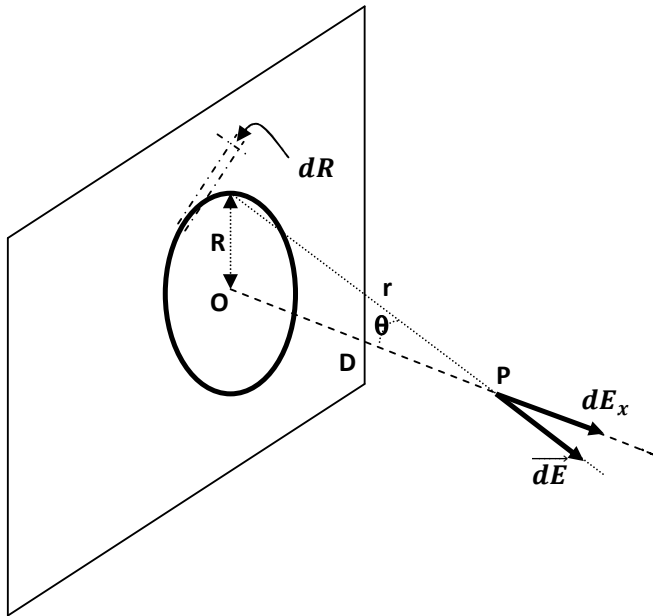
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\gamma dl}{(x^2+R^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \frac{Q}{2\pi R}}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si osservi che se $x \gg R$ il campo assume la struttura $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$. Si ottiene un comportamento equivalente ad una carica puntiforme Q posta nel centro dell'anello.

Esempio E4:

Si prenda in considerazione una superficie piana carica con densità superficiale di carica uniforme σ ($[\sigma]=[C/m^2]$). Si vuole determinare il campo elettrico generato.

Schematizziamo il problema. Isoliamo sul piano una porzione circolare di superficie di spessore dR e raggio R .



Appare evidente che tale superficie sarà $dS = 2\pi R dR$ e ad essa corrisponderà una carica $dq = \sigma dS = 2\pi R dR$.

Per evidenti ragioni di simmetria ed in base a quanto visto nel precedente esempio, il campo elettrico non

potrà che essere esclusivamente ortogonale al piano della porzione circolare e quindi

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sigma\pi R dR}{r^2} \cos(\theta) = \frac{\sigma R dR}{2\epsilon_0 r^2} \cos(\theta).$$

Ora operando le seguenti sostituzioni:

- $R = D \tan(\theta)$
- $dR = \frac{D}{\cos^2(\theta)} d\theta$
- $r^2 = \frac{D^2}{\cos^2(\theta)}$

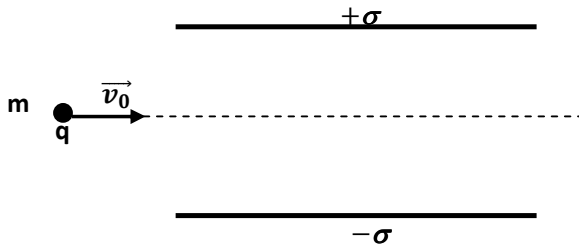
si ha

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma D \tan(\theta) \frac{D}{\cos^2(\theta)} d\theta}{2\epsilon_0 \frac{D^2}{\cos^2(\theta)}} \cos(\theta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Il campo generato da una superficie piana uniformemente carica è costante e non dipende dalla distanza.

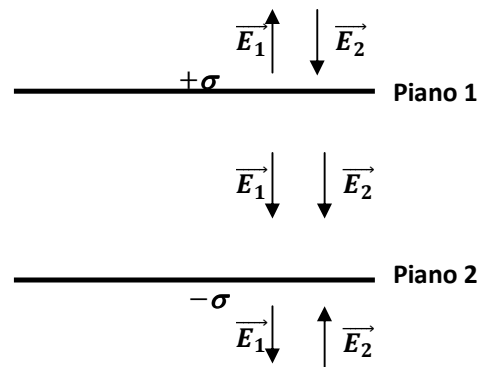
Esempio E5:

Si considerino due superfici piane e parallele ognuna caricata con densità superficiale di carica σ , ma di segno opposto.



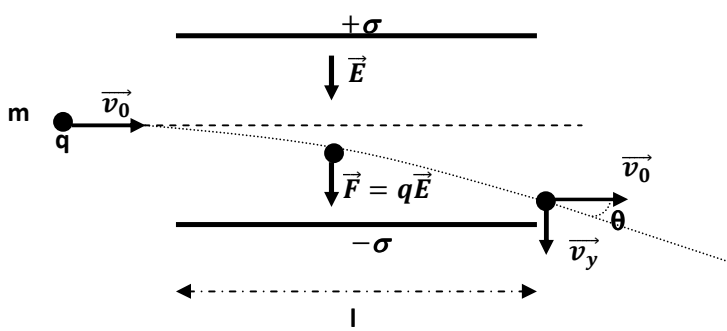
Una carica $q > 0$ di massa m entra tra le due facce con velocità orizzontale costante v_0 . Tale carica subirà l'azione del campo elettrico presente. Si descriva il moto della carica e si calcoli l'angolo di inclinazione della traiettoria all'uscita.

Cominciamo con il ricavare il valore del campo elettrico tra le due superfici caricate con segno opposto. Se osserviamo la schematizzazione indicata dove E_1 è il campo generato dal piano caricato positivamente, mentre E_2 è quello del piano negativo, si deve concludere che il campo elettrico all'esterno dei piani è identicamente nullo. Invece tra i due



piani si ha $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

A questo punto è possibile schematizzare la traiettoria della carica nel seguente modo.



È evidente che la componente orizzontale della velocità rimarrà invariata, ma sorgerà una componente verticale in quanto la carica subirà l'azione

della forza di Coulomb espressa come $F = qE = \frac{\sigma q}{\epsilon_0}$. Quindi in base al secondo principio della dinamica si ha $ma_y = \frac{\sigma q}{\epsilon_0}$ da cui $a_y = \frac{\sigma q}{m\epsilon_0}$.

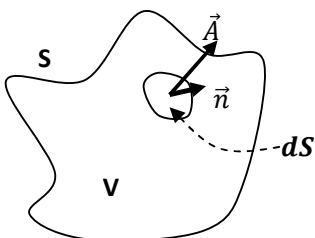
La legge oraria del moto verticale sarà $y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma q}{m\epsilon_0} t^2$, ed essendo $t = \frac{l}{v_0}$ si può determinare lo spostamento verticale all'uscita come $h = \frac{1}{2} \frac{\sigma q l^2}{m\epsilon_0 v_0^2}$.

Dopo l'azione del campo elettrico la velocità risultante $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_y$ sarà inclinata di un angolo θ rispetto a \vec{v}_0 che rimane costante. Per quanto riguarda tale angolo si ha $\tan\theta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{a_y t}{v_0} = \frac{\sigma q l}{m\epsilon_0 v_0^2}$.

3. Il teorema di Gauss

Il teorema di Gauss rappresenta un valido metodo di calcolo di campi elettrici dove sono presenti particolari simmetrie geometriche.

Prima di ricordare il teorema di Gauss è necessario richiamare la definizione di flusso di un vettore. Consideriamo un vettore \vec{A} racchiuso all'interno di una superficie S .



Sia dS un elemento di superficie ed \vec{n} il versore normale a tale elemento. La definizione di flusso

elementare del vettore \vec{A} attraverso l'elemento di superficie risulta essere

$$d\Phi(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{n}dS$$

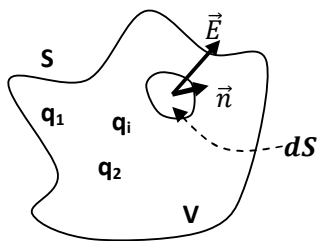
Integrando tale espressione sull'intera superficie S si ha

$$\Phi(\vec{A}) = \oiint \vec{A} \cdot \vec{n}dS$$

Inoltre, se V è il volume racchiuso dalla superficie S , si ricorda il *teorema della divergenza*

$$\oiint \vec{A} \cdot \vec{n}dS = \iiint \nabla \cdot \vec{A}dV$$

Ora il teorema di Gauss prende in considerazione il flusso del campo elettrico prodotto da una qualunque distribuzione di carica racchiusa da una generica superficie S . Tale flusso si intende calcolato attraverso la superficie chiusa che racchiude la distribuzione di carica in esame. In tale caso si ha



$$\Phi(\vec{E}) = \frac{(\sum_i q_i)_S}{\epsilon_0}$$

Sfruttando, quindi, il teorema della divergenza e considerando una distribuzione uniforme di carica di densità ρ , di cui considero un elemento dV , posso scrivere

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{n}dS = \iiint \nabla \cdot \vec{E}dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

Da cui è semplice dedurre una espressione puntuale del teorema di Gauss che altro non è se non la Prima Equazione di Maxwell

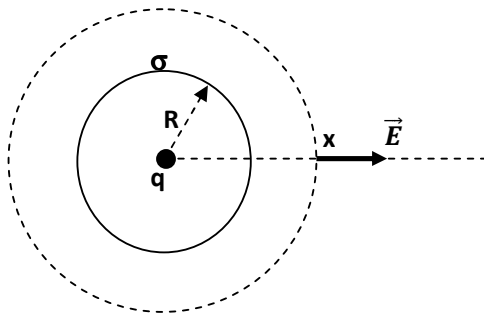
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esempio E6:

Si consideri una superficie sferica di raggio R e caricata uniformemente con una densità di carica σ . Al centro di tale sfera sia poi posta una carica puntiforme q .

Siano tutte le cariche dello stesso segno. Quanto varrà il campo elettrico a distanza $x > R$ dal centro della sfera?

Il problema appare di semplice soluzione con l'ausilio del teorema di Gauss, infatti il campo avrà certamente una simmetria sferica e la schematizzazione più ovvia appare la seguente.



Si può scrivere

$$\Phi(\vec{E}) = E4\pi x^2 = \frac{(q + 4\sigma\pi R^2)}{\epsilon_0}$$

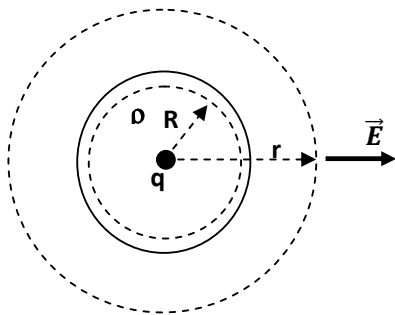
Da cui il campo

$$E = \frac{(q + 4\sigma\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Esempio E7:

Si consideri una sfera conduttrice caricata con densità di carica uniforme pari a $\rho = \frac{dq}{dv}$. Si vuole determinare l'andamento del campo elettrico dal centro della sfera verso l'esterno al variare della distanza r .

È evidente che ancora una volta si ha una simmetria sferica del campo e si può seguire la seguente schematizzazione.



Partendo dal centro della sfera consideriamo una superficie sferica di raggio R inferiore al raggio della sfera conduttrice. In tale caso, per il teorema di Gauss, si scriverà

$$E4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Da cui si ottiene $E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$. Quindi rimanendo all'interno della sfera conduttrice il campo cresce linearmente con il raggio.

Ora consideriamo il caso di $r > R$, ovvero siamo ad una distanza superiore al raggio della sfera conduttrice. Per il teorema di Gauss

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Da cui si ha

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

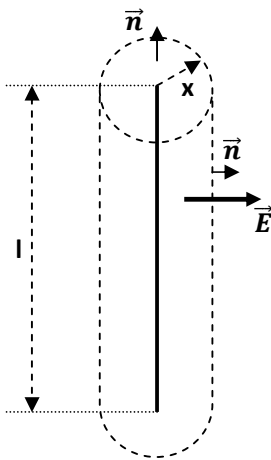
Si osservi che, considerando l'intera carica della sfera $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ concentrata nel centro, il campo risulta $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$.

Quindi per $r > R$ il campo è assimilabile a quello di una carica puntiforme posta nel centro della sfera e di valore pari alla carica totale.

Esempio E8:

Si consideri una linea conduttrice di lunghezza l e uniformemente carica con densità lineare $\gamma = \frac{dq}{dl}$. Determinare il campo elettrico a distanza x dalla linea.

Se schematizziamo la situazione noteremo che ora è conveniente ricorrere ad una superficie di tipo cilindrico.



Per ragioni già discusse in un esempio precedente il campo deve essere solo perpendicolare alla linea conduttrice. Pertanto, considerando una superficie cilindrica di raggio x e avente per asse la linea conduttrice, il flusso di E sarà non nullo solo attraverso la superficie laterale del cilindro.

Allora per il teorema di Gauss

$$E2\pi x l = \frac{\gamma l}{\epsilon_0}$$

Da cui si ha $E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 x}$. Si ritrova così l'espressione già determinata in precedenza a partire dalla definizione di campo elettrico.

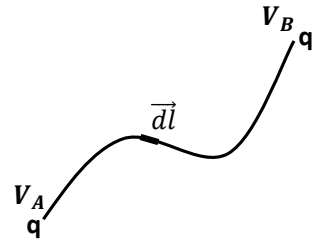
4. Il potenziale elettrico

Anche il campo di forze elettriche è un campo conservativo e pertanto si può scrivere che $\oint \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = 0$. Ma ricordando che $\vec{F}_e = q\vec{E}$ si ha, di conseguenza, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Allora così come sulla forza può essere definita la funzione energia potenziale del campo di forze elettriche, in modo analogo si può definire il potenziale elettrico come funzione scalare (definita a meno di una costante) e tale che

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Appare quindi ovvio che, nota la funzione scalare potenziale elettrico, è possibile ricavare il campo come

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

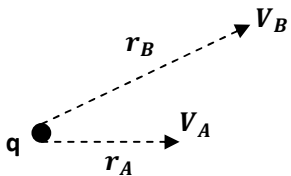


mentre sarà $L_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$.

Inoltre considerata una carica $q > 0$ e assumendo nullo il potenziale elettrico all'infinito è evidente che si avrà

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Quindi se si considera il campo elettrico generato da una carica puntiforme $q > 0$ e si vuole determinare la variazione del potenziale elettrico tra due punti, si può schematizzare la situazione come segue e scrivere



$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

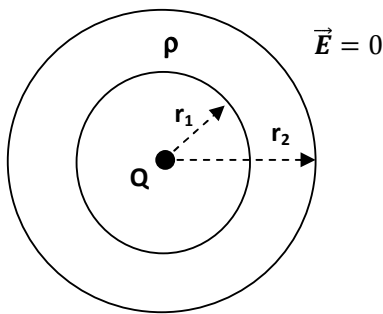
Esempio E9:

Tra due sfere concentriche di raggi $r_1 = 10 \text{ cm}$ e $r_2 = 15 \text{ cm}$ è distribuita uniformemente della carica con una densità ρ positiva. Inoltre nel centro comune delle due sfere è posta una carica puntiforme Q .

Sapendo che all'esterno delle sfere il campo elettrico è nullo e che tra esse vi una d.d.p. $V_{12} = 100 \text{ V}$, determinare:

- la densità ρ ;
- la carica Q .

Schematizziamo il problema nel seguente modo.



Considerando una generica sfera concentrica di raggio r , per il teorema di Gauss, si può scrivere

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 \mathbf{E}(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}.$$

Dove per la carica presente all'interno della generica sfera si può scrivere

$$q(r) = \begin{cases} Q & \text{per } r < r_1 \\ Q + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - r_1^3) & \text{per } r_1 \leq r \leq r_2 \\ Q + \frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3) & \text{per } r > r_2 \end{cases}$$

E quindi per il campo elettrico

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{per } r < r_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - r_1^3)}{r^2} & \text{per } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + \frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3)}{r^2} & \text{per } r > r_2 \end{cases}$$

Però è noto che deve essere nullo il campo all'esterno delle sfere, ciò consente di dedurre che $Q + \frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3) = 0$ e quindi

$$Q = -\frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3)$$

Adesso sostituiamo quest'ultima espressione nella equazione del campo elettrico tra le due sfere. Si ottiene

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3) + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - r_1^3)}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[r - \frac{r_2^3}{r^2} \right]$$

Ora, essendo noto il potenziale tra le due sfere concentriche, si può scrivere

$$\begin{aligned} V_{12} = V_2 - V_1 &= - \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left[r - \frac{r_2^3}{r^2} \right] dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r_2^3}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{2} + \left(\frac{r_2^3}{r_1} - r_2^2 \right) \right] \end{aligned}$$

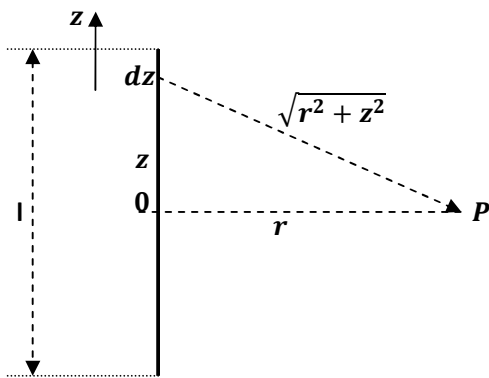
e ricavare $\rho = \frac{3\epsilon_0 V_{12}}{\left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{2} + \left(\frac{r_2^3}{r_1} - r_2^2 \right) \right]} = \frac{3 \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \cdot 100}{\frac{0.1^2 - 0.15^2}{2} + \frac{0.15^3}{0.1} - 0.15^2} = 5.316 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^3$.

Di conseguenza $Q = -\frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3) = -\frac{4}{3}\pi 5.316 \cdot 10^{-7} (0.15^3 - 0.1^3) = -5.28 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Esempio E10:

Calcolare il potenziale di un filo conduttore lungo l e caricato con densità lineare di carica $\gamma = \frac{dq}{dl}$.

Schematizziamo il problema.



Considerando un clementino di linea si può scrivere che $dq = \gamma dz$ e quindi, nel punto P, si avrà

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Appare quindi ovvio calcolare il potenziale come

$$V = 2 \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Ricordando che $\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = d[\ln(z + \sqrt{r^2+z^2})]$ si ha

$$V = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{r} \right]$$

Notare come l'espressione del potenziale sia legata alla lunghezza del filo, mentre per il campo elettrico non c'è relazione con la lunghezza, come visto nell'esempio E8.

Se però considero due punti P_1 e P_2 a distanze rispettivamente r_1 e r_2 dal filo, con la condizione che $r_1, r_2 \ll l$, allora posso esprimere la differenza di potenziale tra tali due punti nel seguente modo.

Prima si osserva che $V_1 \cong \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2l}{r_1} \right)$ e $V_2 \cong \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2l}{r_2} \right)$. Quindi si ha

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Esempio E11:

Una regione di spazio è sede di un campo elettrostatico il cui potenziale può essere espresso secondo la seguente $V(x, y, z) = A(x^2 + y^2)$ con $A = 100 \text{ V/m}^2$.

Calcolare:

- le componenti del campo elettrostatico;
- la quantità di carica contenuta in un cilindro di raggio $R = 1.0 \text{ m}$ e altezza $h = 2.0 \text{ m}$ avente come asse l'asse z .

Per risolvere tale problema cominciamo con il ricorrere alla definizione puntuale di potenziale elettrostatico, ovvero

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Quindi, nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left[\frac{\partial A(x^2 + y^2)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A(x^2 + y^2)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A(x^2 + y^2)}{\partial z} \vec{k} \right] = -2Ax\vec{i} - 2Ay\vec{j} \\ &= -200x\vec{i} - 200y\vec{j} \text{ volt/m} \end{aligned}$$

Si osservi che il campo non presenta variazione lungo l'asse z , anzi presenterà una **simmetria cilindrica** con asse proprio l'asse z . Ciò ci indica una chiara scelta della superficie per il calcolo del flusso di \vec{E} utile alla determinazione della carica immagazzinata nella regione di spazio indicata nella traccia.

Se chiamiamo \mathbf{r}_{xy} il raggio vettore con origine sull'asse z e posto sul piano xy è ovvio che sarà $\overrightarrow{r}_{xy} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Quindi il campo sarà esprimibile come

$$\vec{E} = -2A(x\vec{i} + y\vec{j}) = -2A\overrightarrow{r}_{xy}$$

Scegliamo proprio una superficie cilindrica con asse lungo l'asse z , raggio pari a $R = r_{xy}$ e altezza h . Appare evidente che il flusso di E attraverso tale superficie sarà non nullo solo per la superficie laterale. Quindi si avrà

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi R h E = 2\pi R h (-2AR) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Pertanto la carica cercata sarà

$$Q = -4\pi\epsilon_0 h A R^2 = -4\pi(8.86 \cdot 10^{-12})(2)(100)(1)^2 = -2.22 \cdot 10^{-8} C$$

5. Esempi sui condensatori

Esempio E12:

Un condensatore è costituito da due armature circolari piane di raggio $r=40\text{cm}$ poste alla distanza $d_0=5\text{mm}$. Lo spazio tra le armature è inizialmente vuoto. Il condensatore è collegato ad un generatore con un f.e.m. $\mathcal{E} = 200$ volt.

Determinare:

- 1. Il campo elettrico tra le armature e l'energia elettrostatica immagazzinata;*
- 2. Di quanto varia l'energia elettrostatica immagazzinata se lo spazio tra le armature è riempito con un dielettrico con $\epsilon_r = 4.5$;*
- 3. Il lavoro compiuto dal generatore durante l'inserzione del dielettrico.*

Ricordiamo che la capacità è così definita $C = \frac{Q}{V}$ e per un condensatore a facce piane e parallele si ha $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d_0}$. Inoltre noi già abbiamo determinato il campo elettrico tra due facce conduttrici piane e sappiamo che tale campo è costante e uniforme. Pertanto dovrà valere la seguente relazione con la differenza di potenziale applicata $E d_0 = \Delta V$. Allora si ha

$$E = \frac{\mathcal{E}}{d_0} = \frac{200}{0.005} = 4.0 \cdot 10^4 V/m$$

Per il calcolo dell'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore vale la relazione $U = \frac{1}{2}CV^2$. Allora nel nostro caso si ha $U_0 = \frac{1}{2}C_0\mathcal{E}^2$ con $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0}$. Pertanto

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d_0} \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\pi(0.4)^2}{0.005} (200)^2 \\ &= 1.78 \cdot 10^{-5} \text{joule} \end{aligned}$$

Se inseriamo il dielettrico tra le armature del condensatore, rimanendo inalterata la differenza di potenziale applicata, si ha

$$U = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_0} \mathcal{E}^2 = \varepsilon_r U_0 = 4.5(1.78 \cdot 10^{-5}) = 8.01 \cdot 10^{-5} \text{joule}$$

È ovvio che, non variando il potenziale, si deve avere una variazione della carica immagazzinata. Infatti prima del dielettrico si aveva una carica $q_0 = C_0\mathcal{E}$, poi inserendo il dielettrico $q = C\mathcal{E} = \varepsilon_r C_0\mathcal{E} = \varepsilon_r q_0$, di conseguenza la variazione di carica sarà $\Delta q = q - q_0 = (\varepsilon_r - 1)q_0$.

Tale surplus di carica sarà fornito dal generatore, quindi il lavoro compiuto dal generatore sarà

$$\begin{aligned} L &= \mathcal{E}\Delta q = (\varepsilon_r - 1)q_0\mathcal{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d_0} \mathcal{E}^2 \\ &= 3.5 \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\pi(0.4)^2}{0.005} (200)^2 = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{joule} \end{aligned}$$

Esempio E13:

La capacità di un condensatore può variare da un minimo $C_{min}=50\text{pF}$ ad un massimo $C_{max}=950\text{pF}$. Nella situazione di capacità massima il condensatore viene caricato con una d.d.p. $V=400\text{volt}$. Dopo essere stato caricato, il condensatore viene staccato dal generatore e viene portato nella configurazione di capacità minima.

Calcolare:

- la carica sulle armature del condensatore;
- la d.d.p. tra le armature nella configurazione finale;
- l'energia potenziale del condensatore nella posizione iniziale;
- il lavoro necessario per portare il condensatore dalla configurazione iniziale a quella finale.

Dalla definizione di capacità si ha $Q = CV$, quindi nella situazione iniziale $Q = C_{max}V = 950 \cdot 10^{-12} \cdot 400 = 3.8 \cdot 10^{-6}C$.

Quando il condensatore, staccato dal generatore, viene regolato per la capacità minima non può esserci variazione di carica, ma ci sarà variazione di potenziale. Quindi

$$Q = C_{max}V_i = C_{min}V_f$$

Da cui si ha

$$V_f = \frac{C_{max}}{C_{min}}V_i = \frac{950}{50}400 = 7600\text{volt}$$

Per quanto riguarda l'energia immagazzinata nella posizione iniziale si può scrivere

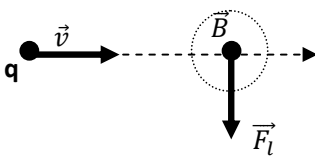
$$U_i = \frac{1}{2}C_{max}V_i^2 = \frac{1}{2}(950 \cdot 10^{-12})(400)^2 = 7.6 \cdot 10^{-5}\text{joule}$$

E per il lavoro compiuto nella variazione della capacità

$$\begin{aligned} L = U_f - U_i &= \frac{1}{2}C_{min}V_f^2 - \frac{1}{2}C_{max}V_i^2 = \frac{1}{2}C_{min}\left(\frac{C_{max}}{C_{min}}V_i\right)^2 - \frac{1}{2}C_{max}V_i^2 \\ &= \frac{1}{2}V_i^2C_{max}\left(\frac{C_{max}}{C_{min}} - 1\right) = U_i\left(\frac{C_{max}}{C_{min}} - 1\right) \\ &= 7.6 \cdot 10^{-6}\left(\frac{950}{50} - 1\right) = 1.368 \cdot 10^{-3}\text{joule} \end{aligned}$$

6. La forza di Lorentz

Si chiama forza di Lorentz quella forza che agisce su un oggetto elettricamente carico che si muove in un campo magnetico. La forza di Lorentz è sempre diretta perpendicolarmente rispetto alla direzione del moto (che ha assunto l'oggetto elettricamente carico all'interno del campo magnetico).



Se consideriamo una carica puntiforme q in moto con velocità \vec{v} in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B} , su tale carica agirà una forza (di Lorentz) esprimibile come

$$\vec{F}_l = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se sulla carica agisce anche un campo elettrico allora la forza totale agente sulla particella sarà data dalla relazione

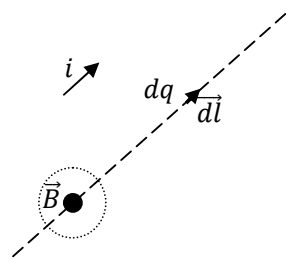
$$\vec{F}_{tot} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Vale la pena osservare che la forza elettrica sarà quella che produrrà una accelerazione nella carica, mentre la forza magnetica genererà solo delle deviazioni di traiettoria. Tutto ciò è facilmente dimostrabile osservando che **solo la forza elettrica può produrre delle variazioni di energia cinetica nella carica in moto**. Infatti se calcoliamo la variazione di energia istantanea, ovvero la potenza, si ha

$$\mathcal{W} = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Ovvero solo la forza elettrica può produrre variazione dell'energia cinetica e quindi accelerare (o decelerare) la carica.

Se poi consideriamo un filo di **sezione trascurabile** percorso da una corrente uniforme i e immerso in un campo magnetico \vec{B} , facendo uso della forza di Lorentz, è possibile determinare la forza che agisce sul filo.



Infatti consideriamo la carica elementare dq che sarà in moto con velocità $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$. Per essa si potrà scrivere

$$dF = dq(\vec{v} \times \vec{B})$$

Ora ricordando la definizione di velocità e poi quella di corrente si ha

$$d\vec{F} = dq \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right) = i(d\vec{l} \times \vec{B})$$

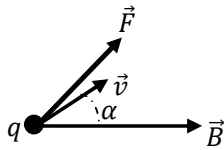
Considerando, infine, la lunghezza del conduttore si ha

$$\vec{F} = \left(\int i(d\vec{l} \times \vec{B}) \right)_l$$

Esempio E14:

Un elettrone è accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = 6 \text{ kV}$ e poi vola in un campo magnetico \mathbf{B} in modo che la sua velocità formi un angolo $\alpha = 30^\circ$ con la direzione del campo. In tale modo l'elettrone inizia a seguire una traiettoria elicoidale intorno alla direzione di \mathbf{B} . Si calcoli il raggio dell'elica R e il passo dell'elica p . Si sa che $B = 1.3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

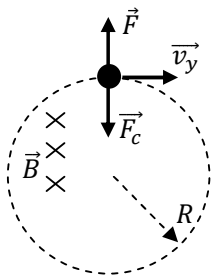
Proviamo a schematizzare la situazione del moto dell'elettrone dopo la fase di accelerazione.



La forza \mathbf{F} è la forza di Lorentz $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ed è ortogonale al piano costituito dai vettori \mathbf{v} e \mathbf{B} . Quindi tale forza diverrà una forza centrale (di tipo centripeta) su una traiettoria circolare la cui velocità tangenziale sarà la componente della velocità ortogonale al vettore campo magnetico, quindi $v_y = v \sin(\alpha)$.

Ovviamente nel moto circolare uniforme la forza centripeta sarà bilanciata dalla componente centrifuga $m \frac{(v_y)^2}{R}$.

La seguente figura dovrebbe chiarire meglio la situazione che si è generata.



Di conseguenza si potrà scrivere

$$qvB \sin(\alpha) = m \frac{(v \sin(\alpha))^2}{R}$$

E ricavare il raggio come

$$R = \frac{mv \sin(\alpha)}{qB}$$

Ora non dimentichiamo che l'elettrone è stato accelerato da una differenza di potenziale, pertanto

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

Da cui

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

E sostituendolo nella espressione del raggio si ha

$$R = \frac{m \sin(\alpha)}{qB} \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sin(\alpha) \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}}$$

$$= \sin(30^\circ) \sqrt{\frac{2(9.11 \cdot 10^{-31})6000}{(1.6 \cdot 10^{-19})(1.3 \cdot 10^{-2})^2}} = 1 \text{ cm}$$

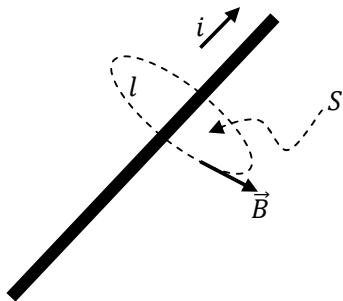
Per la determinazione del passo si deve osservare che mentre l'elettrone esegue delle traiettorie circolari esiste sempre la componente della velocità nella direzione di \mathbf{B} , ovvero $v_x = v \cos(\alpha)$. Tale componente è responsabile dell'avanzamento delle orbite circolari che determina il moto elicoidale.

Per definizione il passo dell'elica è l'avanzamento nella direzione ortogonale al piano delle traiettorie circolari nel tempo che la carica impiega a compiere una circonferenza. Quindi lo possiamo così calcolare

$$p = v_x t = v \cos(\alpha) \frac{2\pi R}{v_y} = v \cos(\alpha) \frac{2\pi R}{v \sin(\alpha)} = \frac{2\pi R}{\tan(\alpha)} = \frac{2\pi \cdot 1}{\tan(30^\circ)} = 11 \text{ cm}$$

7. Il teorema della circuitazione di Ampère

Consideriamo un conduttore percorso da corrente. Esso diverrà sorgente di un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze concentriche e aventi per asse il conduttore.



Si consideri una generica linea chiusa che circonda il conduttore e si determini la circuitazione del vettore \mathbf{B} lungo tale linea. Il **teorema di Ampère** afferma che

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

Quindi se la linea è una circonferenza di raggio R si ha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi R B$ e si ottiene la **legge di Biot - Savart**

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Ricordiamo inoltre che per i campi vettoriali esiste anche il **teorema di Stokes**. Tale teorema afferma, considerando la linea chiusa \mathbf{l} e la generica superficie \mathbf{S} che abbia tale linea come contorno, che

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Ora definendo la corrente i a partire dalla densità di corrente \vec{J} si scrive

$$i = \iint \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

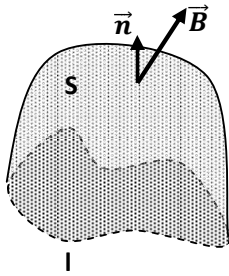
Di conseguenza

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

da cui si ha la relazione locale

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

8. La legge di Faraday-Neumann-Lenz



La legge di Faraday-Neumann-Lenz afferma che la forza elettromotrice indotta in un circuito chiuso (\mathcal{E}) da un campo magnetico (\vec{B}) è proporzionale alla variazione del flusso magnetico di tale campo che attraversa l'area abbracciata dal circuito nell'unità di tempo.

Come noto la corrente circolante in un circuito chiuso è proporzionale al campo elettrico, che porrà in moto le cariche, ed alla conducibilità del circuito stesso. Quindi si potrà scrivere la seguente espressione, che formalizza la legge di Faraday-Neumann-Lenz,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_S(\vec{B})}{\partial t}$$

In tale espressione compare la **variazione nel tempo** del **flusso** del campo magnetico. Tale flusso è calcolato su una **generica superficie** che abbia il circuito come contorno.

Il segno meno sta ad indicare che la corrente prodotta si oppone alla variazione del flusso magnetico, compatibilmente con il principio di conservazione dell'energia: in altri termini, se il flusso concatenato è in diminuzione, il campo magnetico generato dalla corrente indotta

sosterrà il campo originario opponendosi alla diminuzione, mentre se il flusso sta crescendo, il campo magnetico prodotto contrasterà l'originario, opponendosi all'aumento.

Si osservi altresì che un campo magnetico costante non dà origine ad alcuna forza elettromotrice.

Se poi il circuito è composto non da una sola spira, ma da un numero N_{sp} di spire si scriverà $\mathcal{E} = -N_{sp} \frac{\partial \Phi_S(\vec{B})}{\partial t}$.

Ricordando, infine, il teorema della circuitazione

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oiint \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} dS = - \frac{\partial \oiint \vec{B} \cdot \vec{n} dS}{\partial t}$$

e scambiando l'operatore integrale con quello differenziale si ha

$$\oiint \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} dS = - \oiint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

da cui la relazione locale (*terza equazione di Maxwell*)

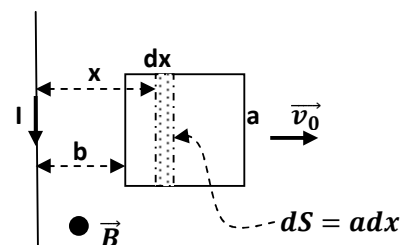
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esempio E15:

In un filo rettilineo di lunghezza indefinita scorre una corrente costante $I=50^{\circ}$. Nello stesso piano del filo vi è anche una bobina quadrata di lato $a=5\text{cm}$ composta da $N=100$ spire. Tale bobina è inizialmente posta a distanza $b=3\text{cm}$ dal filo. All'istante $t=0$ la bobina prende ad allontanarsi dal filo con velocità iniziale $v_0=30\text{m/sec}$. Determinare:

- l'ampiezza della forza elettromotrice indotta nella bobina all'istante $t=0$;*
- il verso della corrente nella bobina;*
- la velocità che la bobina dovrebbe avere in modo che quando la sua distanza dal filo vale $10b$, la forza elettromotrice indotta risulti sempre uguale a quella iniziale.*

Per la soluzione del problema si deve prendere in esame la schematizzazione indicata.



Come prima cosa appare evidente, per la legge di Biot-Savart, che il campo magnetico generato dal filo e a distanza x dallo stesso sarà dato da

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Tale campo sarà uscente dal piano delle spire. Ovviamente per determinare il flusso di \mathbf{B} attraverso la superficie delle spire, essendo \mathbf{B} non costante lungo la coordinata x , devo considerare il flusso elementare attraverso una sezione verticale di superficie. Allora si scriverà

$$d\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{n}dS = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx$$

E integrando su tutta la superficie delle spire

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left[\frac{b+a}{b} \right]$$

Ma le spire si mettono in moto, quindi, alla generica distanza x dal filo si avrà $\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left[\frac{x+a}{x} \right]$. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -N \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -N \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d \left\{ \ln \left[\frac{x+a}{x} \right] \right\}}{dt} = -N \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{x+a} \frac{v_0 x - v_0(x+a)}{x^2} \\ &= \frac{N \mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)} v_0 \end{aligned}$$

Adesso possiamo determinare la forza elettromotrice nel punto iniziale a distanza $x=b$

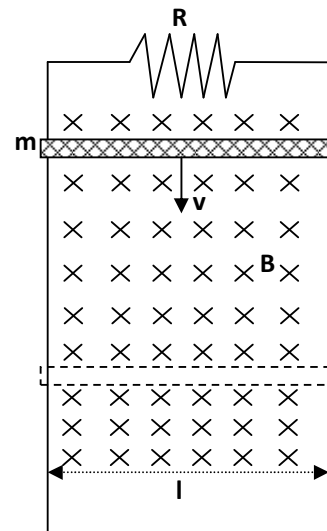
$$\mathcal{E} = \frac{N \mu_0 I a^2}{2\pi b(b+a)} v_0 = \frac{100 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0.05^2}{2\pi \cdot 0.03 \cdot 0.08} 30 = 31.25 mV$$

Il verso sarà, ovviamente, quello antiorario. Mentre per $x=10b=0.3m$ dovendo mantenere lo stesso valore di forza elettromotrice si ha

$$v = \frac{2\pi 10b(10b+a)}{N \mu_0 I a^2} \mathcal{E} = \frac{2\pi \cdot 0.3 \cdot 0.35}{100 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0.05^2} 0.03125 = 1312.5 m/s$$

Esempio E16:

Una sbarra conduttrice di massa $m = 0.1 \text{ kg}$ viene lasciata cadere (da ferma) da una quota y_0 . Nel suo moto la sbarra scivola, con attrito trascurabile, su due rotaie parallele conduttrici verticali a distanza $l = 50 \text{ cm}$ l'una dall'altra (vedi figura), senza mai perdere il contatto con esse. Le due rotaie sono unite alla sommità con una resistenza R . Il sistema



è immerso in un campo magnetico **uniforme** $\mathbf{B} = 2.0 \text{ T}$, perpendicolare al piano delle rotaie ed entrante nel foglio. Trascurando ogni altra resistenza dei conduttori o di contatto si determini il valore che deve assumere la resistenza R perché la barra cada (a regime) con una velocità costante $v_0 = 1 \text{ m/sec}$.

Il moto della barra nel campo magnetico indurrà sulle cariche presenti nel conduttore una forza di Lorentz esprimibile come $F_l = qvB$, essendo i vettori \mathbf{v} e \mathbf{B} tra loro ortogonali.

Di conseguenza lungo la barra conduttrice sarà presente un campo elettrico dato da

$$E = \frac{F_l}{q} = vB$$

Tale campo darà luogo a una f.e.m. ai capi della barra conduttrice esprimibile come

$$\mathcal{E} = lvB.$$

Tale f.e.m. farà scorrere nella barretta, e quindi in R , una corrente (*in senso antiorario*) data da

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{lvB}{R}.$$

In virtù di tale corrente la barretta sarà soggetta ad una forza magnetica diretta verso l'alto e data da

$$F_B = ilB = \frac{l^2 B^2 v}{R}.$$

Si potrà quindi scrivere l'equazione della dinamica come

$$ma = mg - F_B = mg - \frac{l^2 B^2 v}{R} = 0.$$

Quindi il valore di R sarà dato da $R = \frac{l^2 B^2 v}{mg} = \frac{(0.5)^2 (2)^2 1}{0.1(9.8)} = 1 \Omega$.

Un secondo modo di ragionare per risolvere questo stesso problema può essere il seguente. La caduta della barretta può essere vista come una spira conduttrice la cui superficie si estende sempre più in senso verticale. Ora tale superficie è rettangolare può essere determinata come

$$S = l(vt),$$

essendo vt l'altezza istantanea della spira.

La spira taglia il campo magnetico e tale campo risulta normale alla superficie della spira stessa, quindi il flusso sarà

$$\Phi_S(\vec{B}) = \oiint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BS = Blvt$$

Il flusso è variabile nel tempo e allora, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la spira sarà sede di una forza elettromotrice esprimibile come

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{dBlvt}{dt} = -Blv$$

Il segno meno può essere trascurato, esso denoterà una corrente che scorre in senso antiorario lungo la spira. Tale corrente è quindi esprimibile come

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

Si è ritrovata la stessa corrente prima determinata con la forza di Lorentz, quindi il procedimento risolutivo ritorna come quello visto precedentemente.

9. Problemi di vario genere

In questo paragrafo saranno presentati una serie di problemi di carattere generale che spazieranno tra i vari argomenti trattati negli esempi precedenti. Se si dovesse presentare la necessità di qualche chiarimento e/o approfondimento di carattere teorico ciò sarà fatto al momento.

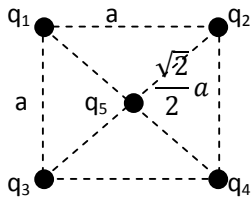
Esempio E17:

Cinque particelle puntiformi identiche (di massa $m=2.0g$ e carica $q=2.0 \cdot 10^{-4} C$) sono mantenute in quiete, nel centro (una delle cinque) e nei vertici (le rimanenti quattro) di un quadrato di lato $a=10 cm$.

Tenendo conto delle sole interazioni elettrostatiche, determinare:

- a) l'energia del sistema di cariche;*
- b) l'ampiezza delle forze esterne con le quale ogni carica deve essere trattenuta nella sua posizione;*
- c) la velocità limite che le cariche acquisirebbero se venissero lasciate libere.*

Per la corretta analisi del problema è bene fare riferimento alla seguente schematizzazione.



Chiaramente l'energia totale di tale sistema di cariche si ottiene calcolando l'energia potenziale elettrostatica di tutte le combinazioni di cariche.

Appare evidente che ci sono: **quattro** combinazioni di carica a distanza a tra loro ($q_1q_2, q_1q_3, q_4q_2, q_4q_3$), **quattro** combinazioni di cariche a distanza $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ tra loro ($q_1q_5, q_2q_5, q_3q_5, q_4q_5$) e due combinazioni di cariche a distanza $\sqrt{2}a$ tra loro (q_1q_4, q_2q_3). Quindi si potrà scrivere

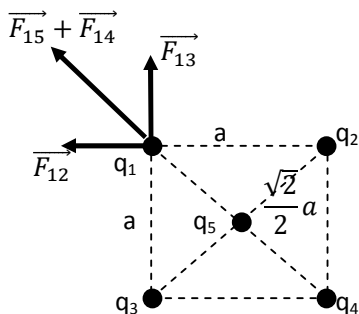
$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4}{a} + \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} + \frac{2}{\sqrt{2}a} \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} [4 + 5\sqrt{2}]$$

Ora sostituendo i valori numerici

$$U = \frac{(2.0 \cdot 10^{-4})^2}{4\pi 8.86 \cdot 10^{-12} 0.1} [4 + 5\sqrt{2}] = 3.98 \cdot 10^4 \text{ joule}$$

Per quanto riguarda le forze agenti sulle cariche è evidente che, per ragioni di simmetria, sulla carica al centro agiranno quattro forze uguali lungo le diagonali e quindi la risultante sarà nulla.

Diversa è la situazione sulle quattro cariche ai vertici. Osserviamo la schematizzazione seguente.



Di conseguenza la carica q_1 , ma in realtà ciascuna delle quattro cariche allo spigolo, dovrà essere mantenuta nella sua posizione da una forza diretta lungo la diagonale pari a

$$\vec{F} = \vec{F}_{15} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

Per la determinazione del modulo di tale forza si avrà

$$F = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{2\sqrt{2} + 5}{2} \right]$$

E sostituendo i valori numerici si ha

$$F = \frac{(2.0 \cdot 10^{-4})^2}{4\pi \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \cdot 0.1^2} \left[\frac{2\sqrt{2} + 5}{2} \right] = 1.41 \cdot 10^5 N$$

Per determinare la velocità limite delle cariche si deve osservare che se viene rimossa la forza F , le cariche agli spigoli si porranno in movimento lungo le direzioni diagonali. Di conseguenza la variazione di energia potenziale elettrostatica diverrà tutta energia cinetica. Quindi

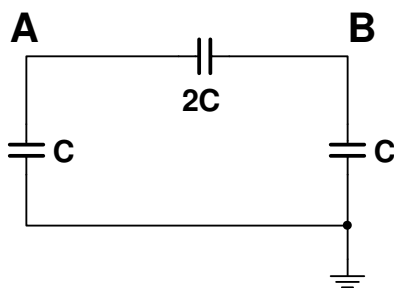
$$4 \frac{1}{2} m v^2 = U$$

Da cui si ha

$$v = \sqrt{\frac{U}{2m}} = \sqrt{\frac{3.98 \cdot 10^4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 3.15 \cdot 10^3 m/s$$

Esempio E18:

Si consideri il sistema di condensatori collegati come indicato di seguito.



Una carica Q viene inserita nel punto **A**.

Si vuole determinare il potenziale V_B a regime.

Esauriti tutti i transitori la carica Q si trova sulla capacità equivalente dell'intero sistema. La tensione sulla capacità equivalente sarà, ovviamente, V_A . Quindi si scrive

$$Q = [C + 2C//C] \cdot V_A$$

$$\text{e si ha } V_A = \frac{Q}{[C + \frac{2}{3}C]} = \frac{Q}{[\frac{5}{3}C]} = \frac{3}{5} \frac{Q}{C}$$

Tale potenziale è localizzato sulla serie $2C+C$, quindi la carica su ciascuna delle due capacità della serie è calcolabile come

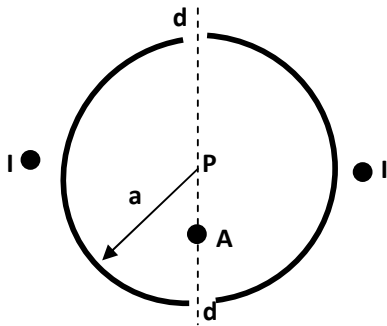
$$Q_S = [2C//C]V_A = \left[\frac{2}{3}C\right] \left[\frac{3Q}{5C}\right] = \frac{2}{5}Q$$

In definitiva, il cercato potenziale sarà

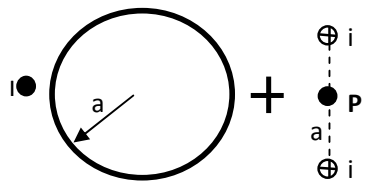
$$V_B = \frac{Q_S}{C} = \frac{2Q}{5C}$$

Esempio E19:

Due semicilindri conduttori di raggio a sono accostati, come in figura, di una fessura $d \ll a$. Essi sono percorsi da una identica corrente I . Si determini l'espressione del campo magnetico nel punto A sulla congiungente delle fessure e a distanza $a/2$ dal centro P .



Possiamo rappresentare tale situazione nel seguente modo.



Le due correnti i servono a sopprimere il contributo di corrente (di un intero cilindro) in corrispondenza delle due fessure. Tali correnti possono essere espresse come $i = J_s d$, dove J_s è una densità lineare sulla semicirconferenza del singolo semicilindro ed è esprimibile come $J_s = \frac{I}{\pi a}$.

Quindi si avrà

$$i = \frac{I}{\pi a} d$$

Ora si dovranno sovrapporre i contributi al campo magnetico dei vari elementi che compongono il modello. Il conduttore cilindrico chiuso non produce campo all'interno (la circuitazione non circonda alcuna corrente), mentre per le correnti i si hanno due campi.

Un campo \mathbf{B}_1 prodotto nel punto \mathbf{A} dalla i in basso (distanza $a/2$) e un campo \mathbf{B}_2 prodotto dalla corrente i in alto (distanza $a+a/2$). Ovviamente tali campi hanno, nel punto \mathbf{A} , verso opposto e $\mathbf{B}_1 > \mathbf{B}_2$. Considerando il verso di \mathbf{B}_1 come quello positivo si ha:

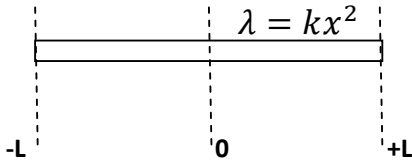
$$B_A = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{\mu_0 i}{2\pi \left(a + \frac{a}{2}\right)} = \frac{\mu_0 i}{\pi a} - \frac{1}{3} \frac{\mu_0 i}{\pi a} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 i}{\pi a}$$

Quindi sostituendo si ha

$$B_A = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 I d}{(\pi a)^2}$$

Esempio E20:

Un conduttore filiforme lungo $2L$ presenta una densità lineare di carica elettrica $\lambda = kx^2$ essendo x la distanza dal suo centro di simmetria, come visibile nella figura seguente.



Supponendo nullo il potenziale elettrico all'infinito, si chiede di calcolare il potenziale V_0 e il campo \mathbf{E}_0 nell'origine.

Si considera un elemento di carica $dq = \lambda dl = kx^2 dx$ posto a distanza x dall'origine, si può scrivere

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0|x|} = \frac{kx^2 dx}{4\pi\epsilon_0|x|}$$

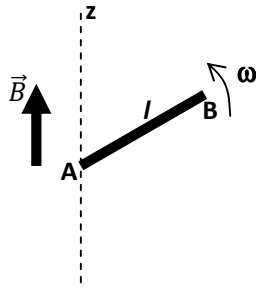
Il valore assoluto è necessario per potere considerare i contributi a destra e a sinistra dell'origine. Ora integrando lungo il conduttore

$$V_0 = \int_{-L}^{+L} \frac{kx^2 dx}{4\pi\epsilon_0|x|} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-L}^0 \frac{x^2}{-x} dx + \int_0^{+L} \frac{x^2}{x} dx \right\} = \frac{kL^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Ricordando che $\vec{E} = -\nabla V$ si avrà $E_0 = -\frac{d}{dx}[V_0] = 0$.

Esempio E21:

Una barretta conduttrice lunga l è imperniata ad una estremità e ruota su di un piano con velocità angolare costante ω . Ortogonalmente al piano di rotazione è presente un campo magnetico costante e uniforme di induzione \mathbf{B} . Si determini la differenza di potenziale tra i due estremi A e B della barretta.



Si consideri un elemento dr sulla barretta conduttrice. Tale elemento è posizionato a distanza r dal centro di rotazione A e vi è localizzata la carica $dq = \frac{q}{l} dr$. La forza di Lorentz che agisce su tale carica è

$$dF = dq(vB) = dq(\omega r B) = \frac{q}{l} \omega r B dr$$

Quindi integrando lungo la barretta si ha

$$F = \int_A^B dF = \int_0^l \frac{q}{l} \omega r B dr = \frac{q}{l} \omega B \int_0^l r dr = \frac{1}{2} q \omega B l$$

Ovviamente tale forza agisce sulla carica q , si è quindi in presenza di un campo elettrico

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{2} \omega B l$$

e, quindi, il richiesto potenziale sarà

$$V_{AB} = El = \frac{1}{2} \omega B l^2$$