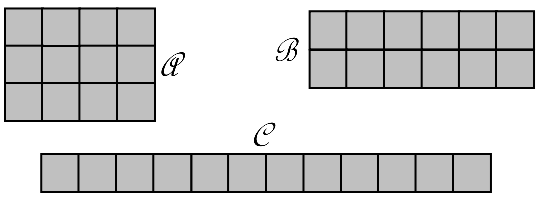
ESTENSIONE ED EQUIVALENZA

Superficie piana limitata. Una superficie piana limitata è una parte di piano limitata da una linea chiusa, oppure una parte di piano compresa tra due o più linee chiuse che non si intersecano.

Estensione di una superficie piana. Il concetto di **estensione di una superficie** è un concetto primitivo, come quelli di punto, retta, piano: non ha bisogno di concetti più semplici per essere definito. Tutti abbiamo un'idea intuitiva dell'estensione di una superficie.

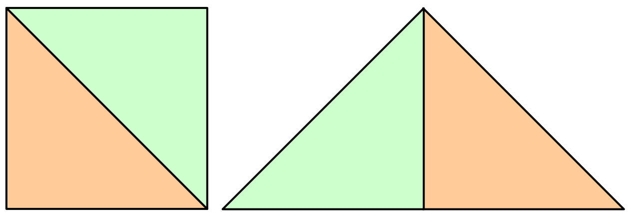
Superfici Equivalenti. <u>Due superfici piane aventi la stessa estensione si dicono equivalenti</u>. Se due superfici $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono equivalenti si scrive:

$$\mathscr{A} \doteq \mathscr{B}$$



Le tre superfici $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ sono tutte equivalenti tra loro, poiché sono stare "realizzate" tutte con 12 "mattonelle" identiche.

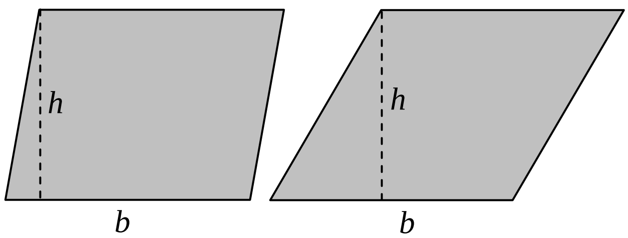
Postulato. <u>Se due superfici sono congruenti esse sono sicuramente equivalenti</u>, cioè due superfici sovrapponibili hanno certamente la stessa estensione.
Ovviamente non vale il viceversa, cioè <u>due superfici equivalenti non sono necessariamente congruenti</u>. Le due superfici della figura seguente, pur avendo la stessa estensione, non sono sicuramente sovrapponibili.



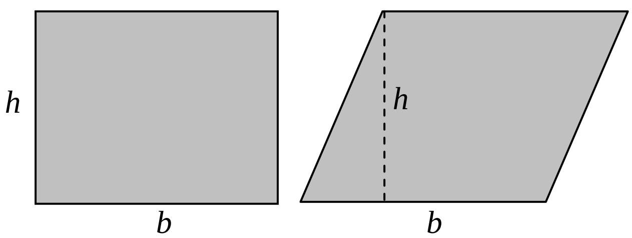
Possiamo dire che l'*equivalenza delle superfici* è una relazione più generale della *congruenza (*cioè della *sovrapponibilità*), in quanto *non dipende dalla forma* delle superfici di cui confrontiamo le espressioni.

EQUIVALENZA DI POLIGONI

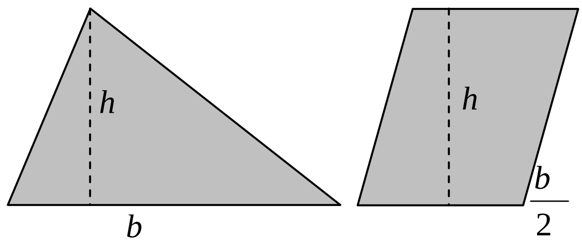
Teorema 1. Se due parallelogrammi hanno basi ed altezze rispettivamente congruenti, essi sono equivalenti.



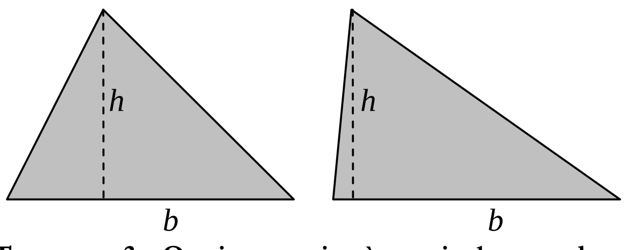
Corollario 1. Se un parallelogramma e un rettangolo hanno basi ed altezze rispettivamente congruenti, essi sono equivalenti.



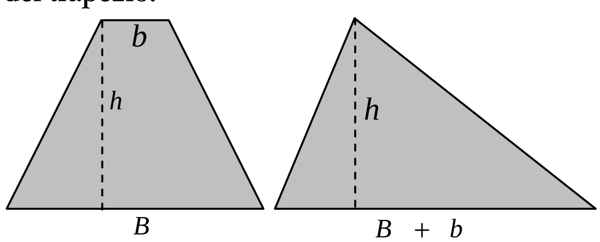
Teorema 2. Ogni triangolo è equivalente ad un parallelogramma che ha altezza congruente a quella del triangolo e base congruente a metà di quella del triangolo.



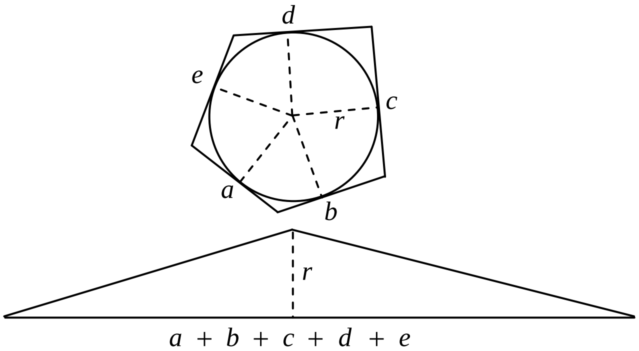
Corollario 2. Se due triangoli hanno basi ed altezze rispettivamente congruenti, essi sono equivalenti.



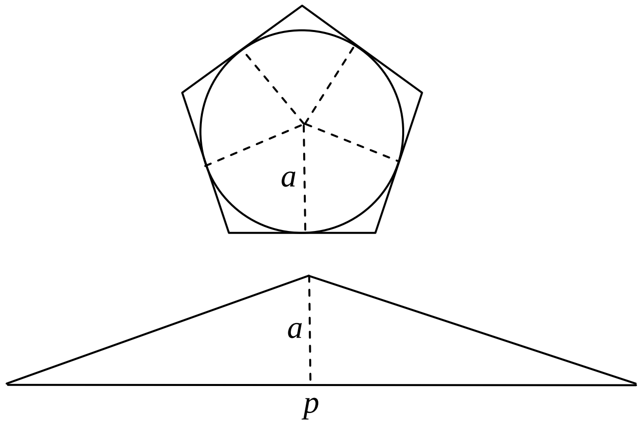
Teorema 3. Ogni trapezio è equivalente ad un triangolo che ha altezza congruente a quella del trapezio e base congruente alla somma delle basi del trapezio.



Teorema 4. Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha altezza congruente al raggio della circonferenza e base congruente al perimetro del poligono.



Corollario 4. Ogni poligono regolare è equivalente con un triangolo che ha base congruente al perimetro del poligono ed altezza la rispettiva apotema.

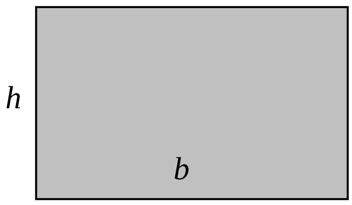


AREE DELLE SUPERFICI

Definizione di Area. **L'area è la misura dell'estensione di una superficie.** Per la precisione si dovrebbe distinguere fra la superficie, intesa come insieme di punti e la sua area (che è un valore numerico associato alla precedente). Spesso però, nel parlare comune ma anche in esposizioni scientifiche, il termine area e il termine superficie vengono usati intercambiabilmente. Ciò è un errore perché esistono molte differenze, anche sostanziali.

Aree di superfici equivalenti. Se due superfici sono equivalenti, esse hanno la stessa estensione e perciò **esse hanno** anche **la stessa area**.

Area del Rettangolo. *L'area di un rettangolo è uguale al prodotto della misura b della base per la misura h dell'altezza.*

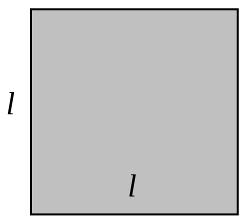


$$\boxed{A = b \cdot h}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$b = \frac{A}{h} \qquad h = \frac{A}{b}$$

Area del Quadrato. Un quadrato è un rettangolo con base ed altezza congruenti. Quindi:



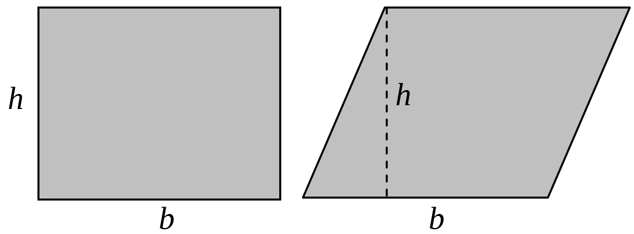
L'area di un quadrato è uguale al quadrato della misura l del lato.

$$\boxed{A = l^2}$$

da cui si ricava la formula inversa:

$$l = \sqrt{A}$$

Area del Parallelogramma. Ricordando che ogni parallelogramma è equivalente con un rettangolo con base ed altezza rispettivamente congruenti, si ha:



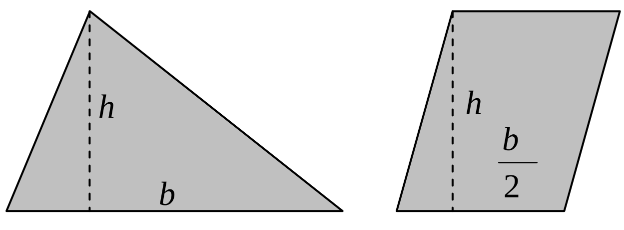
L'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della misura b della base per la misura h dell'altezza.

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$b = \frac{A}{h} \qquad h = \frac{A}{b}$$

Area del triangolo. Ricordando che ogni triangolo è equivalente con un parallelogramma avente base congruente alla metà della base del triangolo ed altezza congruente all'altezza del triangolo, si ha:



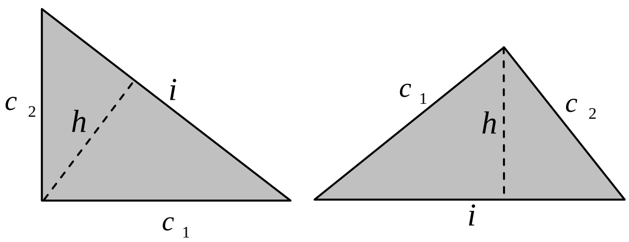
L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della misura b di una base per la misura h della relativa altezza.

$$\boxed{A=\frac{b\cdot h}{2}}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$b=\frac{2A}{h} \qquad h=\frac{2A}{b}$$

Triangolo rettangolo. In particolare, l'area del triangolo rettangolo, interpretando come base l'ipotenusa *i* o il cateto c_1, è data da:



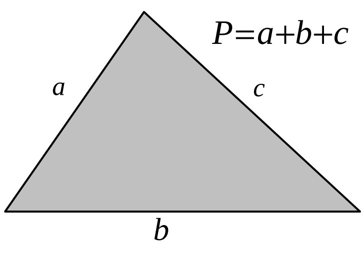
$$A=\frac{i\cdot h}{2} \qquad A=\frac{c_1\cdot c_2}{2}$$

Altezza relativa all'ipotenusa. Dalle formule precedenti è $i\cdot h = c_1 \cdot c_2$, da cui si ricava:

$$h=\frac{c_1\cdot c_2}{i}$$

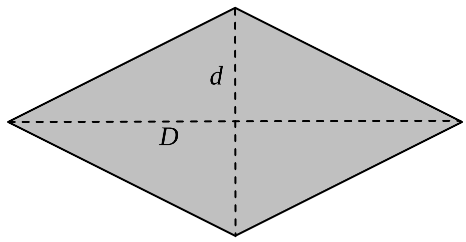
In un triangolo rettangolo, la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle misure dei cateti diviso la misura dell'ipotenusa.

Area di un triangolo quando si conoscono i suoi tre lati. L'area del triangolo si può anche calcolare a partire dalle misure dei lati, senza conoscere le altezze, grazie alla famosa formula di Erone. Indicando con a, b e c le misure dei tre lati e con *P* il perimetro del triangolo, si ha:



$$A=\sqrt{\frac{P}{2}\cdot\left(\frac{P}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{P}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{P}{2}-c\right)}$$

Area del Rombo. Osservando che un rombo viene diviso da una diagonale in due triangoli congruenti, aventi per base detta diagonale e per altezza metà dell'altra diagonale, si ha:



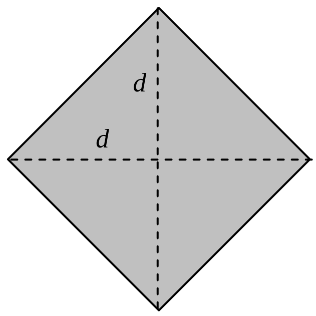
L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle misure D e d delle sue diagonali.

$$\boxed{A=\frac{D\cdot d}{2}}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$D=\frac{2A}{d} \qquad d=\frac{2A}{D}$$

Area del quadrato in funzione della diagonale. Essendo il quadrato un rombo con le diagonali congruenti, l'area del quadrato, a partire dalla misura della diagonale, è data da:



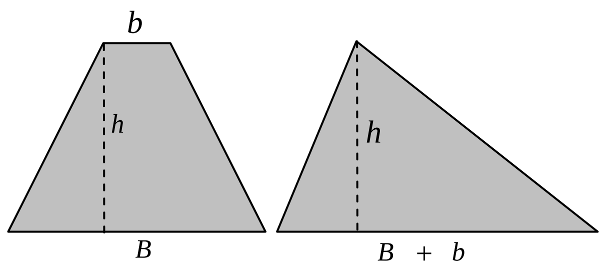
$$A=\frac{d^2}{2}$$

Diagonale di un quadrato. Da tale formula si ricava la formula inversa:

$$d=\sqrt{2A}$$

La misura della diagonale di un quadrato è uguale alla radice quadrata del doppio dell'area.

Area del trapezio. Ricordando che ogni trapezio è equivalente ad un triangolo avente base congruente alla somma delle basi del trapezio ed altezza congruente all'altezza del triangolo, si ha:



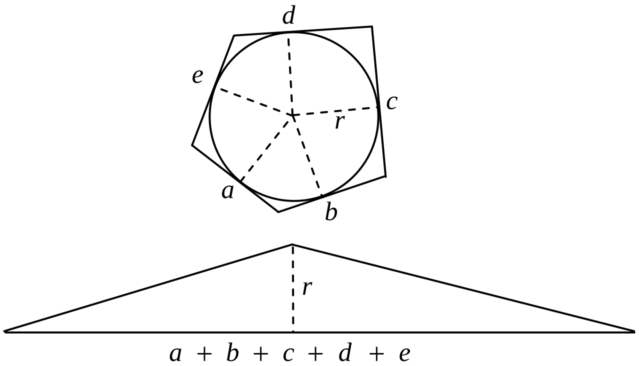
L'area di un trapezio è uguale al semiprodotto della somma delle misure B e b delle basi per la misura h dell'altezza.

$$\boxed{A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$h=\frac{2A}{B+b} \qquad B+b=\frac{2A}{h}$$

Area di un poligono circoscritto ad una circonferenza. Ricordando che ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ed equiscomponibile con un triangolo avente base congruente alla somma dei lati del poligono ed altezza congruente al raggio della circonferenza e che se due poligoni sono equiscomponibili essi hanno la stessa area, si ha:

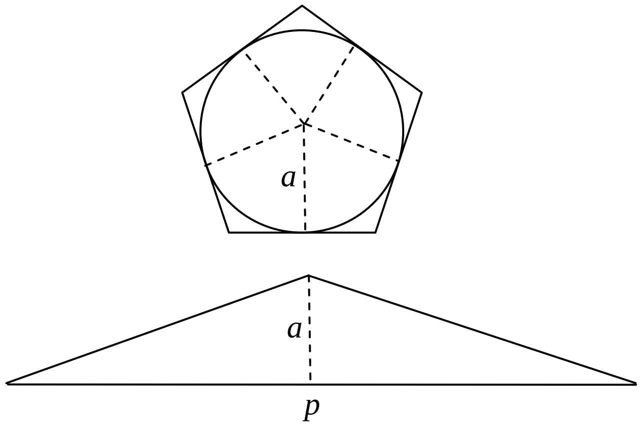


$$\boxed{A = \frac{P \cdot r}{2}}$$

da cui si ricavano le formule inverse:

$$P = \frac{2A}{r} \qquad r = \frac{2A}{P}$$

Area di un poligono regolare. Ricordando che ogni poligono regolare è sempre circoscrivibile a una circonferenza e che in tal caso il raggio della circonferenza inscritta viene anche denominato *apotema* del poligono, si ha:



$$\boxed{A = \frac{P \cdot a}{2}}$$

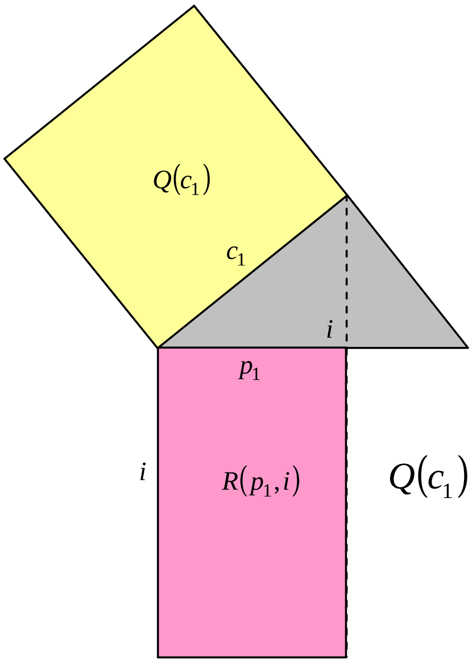
da cui si ricavano le formule inverse:

$$P = \frac{2A}{a} \qquad a = \frac{2A}{P}$$

TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

I Teorema di EUCLIDE. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente con il rettangolo avente i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione del cateto sull'ipotenusa.

Per il cateto c_1 si ha:



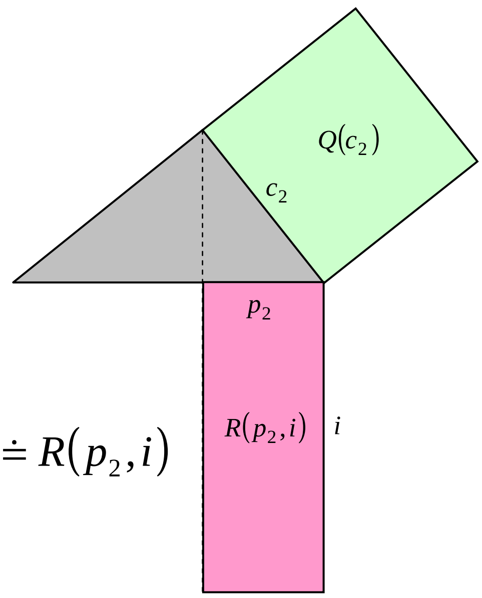
$$Q(c_1) \doteq R(p_1, i)$$

Il I teorema di Euclide è espresso dalla formula:

$$\boxed{c_1^{\,2} = p_1 \cdot i}$$

dalla quale si ricavano: $c_1 = \sqrt{p_1 \cdot i} \qquad i = \dfrac{c_1^{\,2}}{p_1} \qquad p_1 = \dfrac{c_1^{\,2}}{i}$

Analogamente per l'altro cateto c_2 si ha:



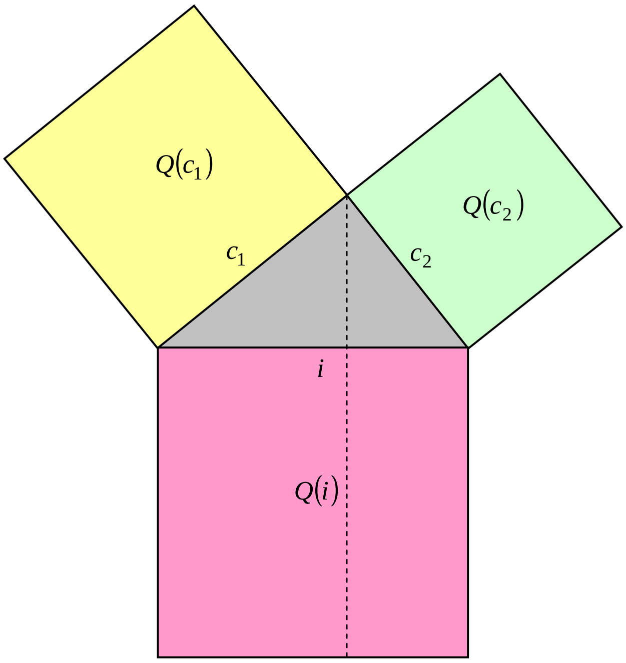
$$Q(c_2) \doteq R(p_2, i)$$

$$\boxed{c_2^{\,2} = p_2 \cdot i}$$

dalla quale si ricavano:

$$c_2 = \sqrt{p_2 \cdot i} \qquad i = \frac{c_2^{\,2}}{p_2} \qquad p_2 = \frac{c_2^{\,2}}{i}$$

Teorema di PITAGORA. In ogni triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente con il quadrato costruito sull'ipotenusa.



$$Q(c_1)+Q(c_2)\doteq Q(i)$$

Il teorema di Pitagora è espresso dalla formula:

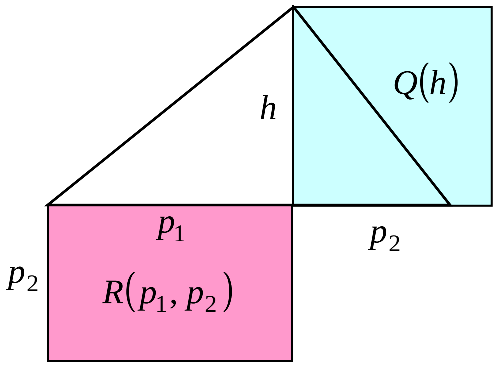
$$\boxed{i^2=c_1{}^2+c_2{}^2}$$

dalla quale si ricavano:

$$i=\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2} \qquad c_1=\sqrt{i^2-c_2{}^2} \qquad c_2=\sqrt{i^2-c_1{}^2}$$

Inverso del teorema di PITAGORA. Se in un triangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equiscomponibile ed equivalente con il quadrato costruito sull'ipotenusa, allora il triangolo è rettangolo

II Teorema di EUCLIDE. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente con il rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



$$Q(h)=R(p_1,p_2)$$

Il II teorema di Euclide è espresso dalla formula:

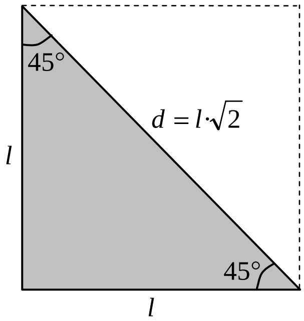
$$\boxed{h^2=p_1\cdot p_2}$$

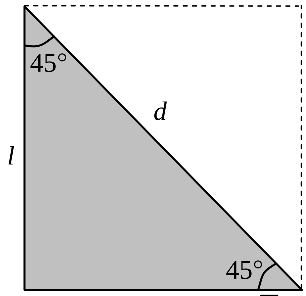
dalla quale si ricavano:

$$h=\sqrt{p_1\cdot p_2} \qquad p_1=\frac{h^2}{p_2} \qquad p_2=\frac{h^2}{p_1}$$

TRIANGOLI PARTICOLARI DI 45°, 30° - 60° (*le squadrette da disegno*)

Triangolo rettangolo con angoli di 45°. Ogni triangolo rettangolo con angoli di 45° è la metà di un quadrato ed è pertanto isoscele:





$$l=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Misura della diagonale in funzione del lato. Dal teorema di Pitagora risulta:

$$d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\cdot\sqrt{2}$$

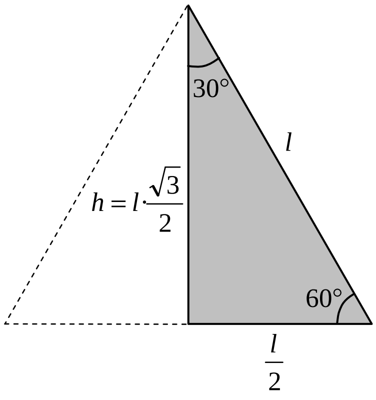
Misura del lato in funzione della diagonale. Invertendo la relazione precedente si ha:

$$l=\frac{d}{\sqrt{2}}$$

e razionalizzando si ottiene:

$$l=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{d\cdot\sqrt{2}}{2}$$

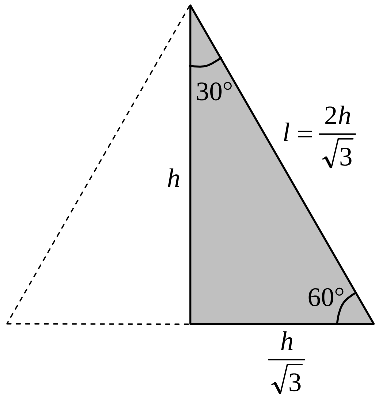
Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°. Ogni triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è la metà di un triangolo equilatero e quindi il cateto minore è congruente alla metà dell'ipotenusa:



<u>Misura dell'altezza in funzione dell'ipotenusa *l*</u>. Supponiamo che il triangolo sia posto come in figura, con l'angolo maggiore adiacente alla base. Il cateto minore, per quanto detto, è la metà dell'ipotenusa e vale *l/2*. Per il teorema di Pitagora l'altezza *h* risulta poi uguale a:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l\cdot\sqrt{3}}{2}$$

<u>Misura dell'ipotenusa in funzione dell'altezza</u>. Invertendo la relazione precedente si ha:



$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

e razionalizzando si ottiene:

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot h}{3}$$