Esercizio 26

[file scaricato da http://www.extrabyte.info]

Si determini il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
2. $f(x) = \ln\left(3^{2x} - 3^{x+1} + 2\right)$
3. $f(x) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$
4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin 3x}$
5. $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x-1}$
6. $f(x) = \ln(\sin 3x)$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
8. $f(x) = \log_3(1 + \ln x)$
9. $f(x) = \log_2 \log_3 \ln(x+1)$
10. $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \ln\left(x^2 - 1\right)$
11. $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
12. $f(x) = \sqrt{x - x^3}$
13. $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
14. $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$
15. $f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{x}{e}\right)$
16. $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$
17. $f(x) = (3x-2)^x$
18. $f(x) = \sqrt{\frac{2^x-1}{1-3^{x+1}}}$

Soluzioni

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$

   Introduciamo la variabile ausiliaria $t = 2x$, quindi deve essere:

   $$\sin t \geq 0 \Longrightarrow t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

   o, ciò che è lo stesso:

   $$2k\pi \leq t = 2x \leq (2k+1)\pi$$

Quindi:

$$k\pi \leq x \leq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}$$

Il campo di esistenza (c.e., da qui in poi) è:

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

2. $f(x) = \ln\left(3^{2x} - 3^{x+1} + 2\right)$

   Deve essere:

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 > 0 \Longleftrightarrow 3^{2x} - 3^{x} \cdot 3 + 2 > 0$$

   Poniamo $3^x = t$, per cui:

$$t^2 - 3t + 2 > 0 \Longleftrightarrow t \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

   Cioè:

$$\begin{aligned} &3^x < 1 \Longrightarrow x < 0 \\ &3^x > 2 \Longrightarrow x > \log_3 2 \end{aligned}$$

   Quindi:

$$X = (-\infty, 0) \cup (\log_3 2, +\infty)$$

3. $f(x) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$

   Deve essere:

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \Longleftrightarrow x \in (1, 3) = X$$

4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin 3x}$

$$\sin 3x \neq 0 \Longleftrightarrow 3x \neq k\pi \Longleftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{3},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

   Quindi:

$$X = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{3}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

5. $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x-1}$

$$x^2 + x - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

   Quindi:

$$X = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$$

6. $f(x) = \ln(\sin 3x)$
$$\sin 3x > 0$$
Poniamo $t = 3x$
$$\sin t > 0 \Longleftrightarrow t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$
Equivalente a
$$2k\pi < t = 3x < (2k+1)\pi \Longleftrightarrow 2k\frac{\pi}{3} < x < (2k+1)\frac{\pi}{3}$$
Quindi:
$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2k\frac{\pi}{3}, (2k+1)\frac{\pi}{3}\right)$$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$$\left.\begin{array}{c} 1-x^2>0 \\ x\neq 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = [-1,0)\cup(0,1]$$

8. $f(x) = \log_3(1+\ln x)$
$$\left.\begin{array}{c} x>0 \\ 1+\ln x>0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

9. $f(x) = \log_2 \log_3 \ln(x+1)$
Devono essere simultaneamente vere
$$\begin{aligned} \log_3 \ln(x+1) > 0 &\Longrightarrow \ln(x+1) > 1 \Longrightarrow x+1 > e \Longrightarrow x > e-1 \\ \ln(x+1) > 0 &\Longrightarrow x+1>1 \Longrightarrow x>0 \\ x+1>0 &\Longrightarrow x>-1, \end{aligned}$$
cioè:
$$X = (e-1, +\infty)$$

10. $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \ln(x^2-1)$
Devono essere simultaneamente vere
$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \ln\left(x^2-1\right) > 0 &\Longrightarrow 0 < \ln\left(x^2-1\right) < 1 \\ \ln\left(x^2-1\right) > 0 &\Longrightarrow x+1>1 \Longrightarrow x>0 \\ x^2-1>0 &\Longrightarrow x>-1, \end{aligned}$$
Risolviamo la prima:
$$0 < \ln\left(x^2-1\right) < 1$$
$\ln(x^2-1) > 0 \Longrightarrow x^2-1 > 1 \Longrightarrow x \notin \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
$\ln(x^2-1) < 0 \Longrightarrow x^2-1 < 1 \Longrightarrow x^2-1 < e \Longrightarrow x \in \left(-\sqrt{1+e}, \sqrt{1+e}\right)$
Si conclude che
$$X = \left(-\sqrt{1+e}, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{1+e}\right)$$

11. $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

$$\left.\begin{array}{c} -x \geq 0 \\ 2 + x > \end{array}\right) \Longrightarrow X = (-2, 0]$$

12. $f(x) = \sqrt{x - x^3}$

$$x^3 - x \leq 0 \Longleftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) \leq 0$$

Studiando il segno del prodotto:

$$X = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

13. $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

Studiando il segno del prodotto:

$$X = (-2, 2)$$

14. $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$

$$\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$$

Cioè il campo di esistenza è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{array}{c} \dfrac{2x}{1+x} \geq -1 \\ \dfrac{2x}{1+x} \leq 1 \end{array}$$

$\frac{2x}{1+x} \geq -1 \Longleftrightarrow \frac{3x+1}{x+1} \geq 0$. Studiando il segno di questo rapporto, otteniamo:

$$\frac{3x+1}{x+1} \geq 0 \Longleftrightarrow x \in X_1 = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$\frac{2x}{1+x} \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 0$. Studiando il segno di questo rapporto, otteniamo:

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 0 \Longleftrightarrow x \in X_2 = (-1, 1]$$

Quindi:

$$X = X_1 \cap X_2 = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$$

15. $f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{x}{e}\right)$

$$\left|\ln \frac{x}{e}\right| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \ln \frac{x}{e} \leq 1$$

Cioè il campo di esistenza è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni:

$$\ln \frac{x}{e} \leq 1$$
$$\ln \frac{x}{e} \geq -1$$

$\ln \frac{x}{e} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{x}{e} < e \Longrightarrow 0 < x < e^2 \Longrightarrow x \in X_1 = (0, e^2]$
$\ln \frac{x}{e} \geq -1 \Longleftrightarrow \frac{x}{e} > 0,\ \frac{x}{e} \geq \frac{1}{e} \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow x \in X_2 = [1, +\infty]$
Quindi:

$$X = X_1 \cap X_2 = \left[1, e^2\right]$$

16. $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

$$e + \frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow \frac{ex+1}{x} > 0$$

Studiano il segno di questo rapporto, si ottiene il campo di esistenza:

$$X = \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (0, +\infty)$$

17. $f(x) = (3x-2)^x$

$$3x - 2 > 0 \Longrightarrow X = \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

18. $f(x) = \sqrt{\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}}}$

$$\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}} \geq 0$$

Segno del numeratore:

$$2^x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow 2^x \geq 1 \Longleftrightarrow x \in [0, +\infty)$$

Segno del denominatore:

$$1 - 3^{x+1} > 0 \Longleftrightarrow 3^{x+1} - 1 < 0$$

Poniamo $t = x + 1$, ottenendo $3^t < 1 \Longleftrightarrow t < 0$, quindi $x < -1$. Da ciò segue il segno del rapporto $\frac{2^x-1}{1-3^{x+1}}$:

$$\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1, 0]$$

E finalmente il c.e.:

$$X = (-1, 0]$$

Esercizio 123

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\arcsin x - \arccos x}$$

***

Soluzione
L'insieme di definizione X è tale che:

$$\arcsin x \geq \arccos x$$

Tale disequazione si risolve graficamente (fig. 1):

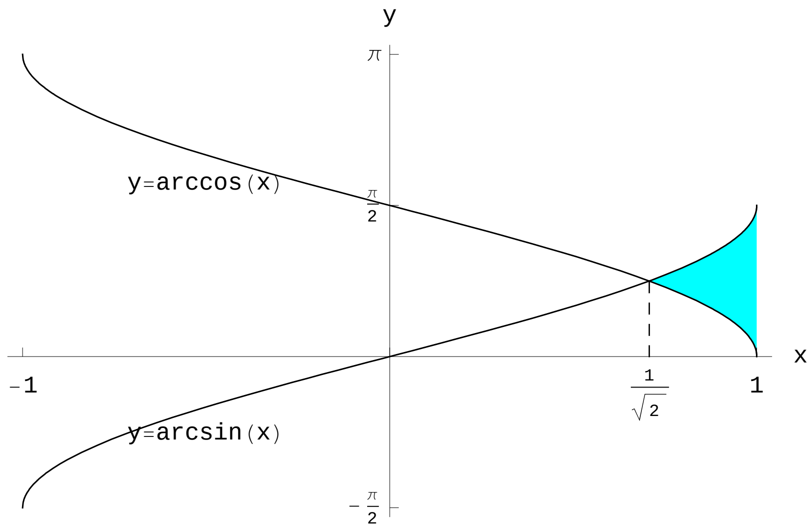

Figure 1: Diagramma cartesiano di $\arcsin x$ e $\arccos x$.

Vediamo che $\arcsin x \geq \arccos x \iff x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Si conclude che:

$$X = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$$

Esercizio 124

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \ln(\arctan x - \arcsin x) \tag{1}$$

***

Soluzione
L'insieme di definizione X è tale che:

$$\arctan x > \arcsin x \tag{2}$$

Tale disequazione può essere risolta sia analiticamente che graficamente.
Analiticamente: siccome l'$\arctan x$ è monotamente crescente, si ha che

$$x > \tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi:

$$x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3}$$

1. $x > 0$

   $$\sqrt{1-x^2} > 1,$$

   che è priva di soluzioni.

2. $x < 0$

   $$\sqrt{1-x^2} < 1,$$

   che è verificata in (tenendo conto della condizione $x < 0$) $[-1, 0)$, per cui l'insieme di definizione è:

$$X = [-1, 0) \tag{4}$$

Per risolvere la (2) graficamente, tracciamo il diagramma cartesiano di $\arctan x$ e $\arcsin x$ (fig. 2), da cui vediamo che l'insieme delle soluzioni della (2 è l'intervallo (4).

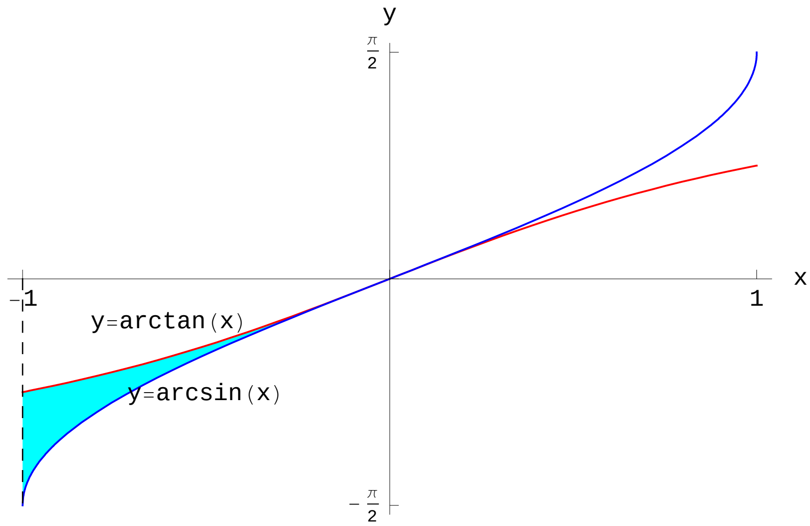

Figure 2: Diagramma cartesiano di $\arcsin x$ e $\arctan x$.

Esercizio 125

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \ln\left(20\arctan^2 x - 9\pi\arctan x + \pi^2\right) \tag{5}$$

***

Soluzione
L'insieme di definizione X è tale che:

$$20\arctan^2 x - 9\pi\arctan x + \pi^2 > 0 \tag{6}$$

Poniamo $t = \arctan x$

$$20t^2 - 9\pi t + \pi^2 > 0 \tag{7}$$

La soluzione della (7) è:

$$t < \frac{\pi}{5}, \, t > \frac{\pi}{4}$$

Rirpristinando la variabile x:

$$\arctan x < \frac{\pi}{5}, \; \arctan x > \frac{\pi}{4}$$

Cioè:

$$x < \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \;\; x > 1$$

Si conclude che l'insieme di definizione della (5) è:

$$X = \left(-\infty, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right) \cup (1, +\infty) \tag{8}$$