# Disposizioni semplici

$$D_{n,K}=n(n-1)(n-2).......(n-K+1) \qquad \text{con } 0<K\leq n$$

*Dati "**n**" elementi e **K** (numero naturale) ≤ **n** si dicono **disposizioni semplici** di **n** elementi di classe **K** i raggruppamenti ottenuti scegliendo K elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano distinti quando differiscono <u>per almeno uno dei componenti</u> oppure per <u>l'ordine</u> secondo il quale sono allineati.*

1. Quante sono le disposizioni di 10 elementi di classe 3 ? :

$$D_{10,3} = \underbrace{10(10-1)(10-2)}_{tre\ fattori} = 10 \bullet 9 \bullet 8 = 720$$

2. Sei persone hanno a disposizione quattro sedie, in quanti modi diversi le possono occupare? :

$$D_{6,4} = \underbrace{6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3}_{4\ fattori} = 360$$

3. Nella *"corsa-tris"* dell'ippica gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arrivano al 1°, al 2° e al 3° posto. Supponendo che partano 8 cavalli, quanti sono i possibili ordini di arrivo ? :

$$D_{8,3} = \underbrace{8(8-1)(8-2)}_{tre\ fattori} = 8 \bullet 7 \bullet 6 = 336$$

4. In quanti modi diversi possono sistemarsi in una libreria sette libri scelti tra venti disponibili ? :

$$D_{20,7} = \underbrace{20 \bullet 19 \bullet 18 \bullet 17 \bullet 16 \bullet 15 \bullet 14}_{7\ fattori} = 390700800$$

5. Quante sono le disposizioni di otto elementi di classe cinque ? :

$$D_{8,5} = \underbrace{8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4}_{5\ fattori} = 6720$$

6. Quanti numeri di tre cifre possono formarsi con le cifre 1, 2, 5, 6 e 7 ? :

$$D_{5,3} = 5(5-1)(5-2) = \underbrace{5 \bullet 4 \bullet 3}_{3\ fattori} = 60$$

# Permutazioni semplici

*Dati "**n**" elementi si dicono **permutazioni semplici** tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo tutti gli **n** elementi disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono solo per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.*
*Dunque le **permutazioni semplici** di n elementi distinti corrispondono alle **disposizioni** degli n elementi di classe n.*

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2).......(n-n+1) = n(n-1)(n-2) \bullet\bullet\bullet\bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = n!$$

Il simbolo $n!$ si legge "***enne fattoriale***".

*Per definizione valgono:* 0! = 1 ; 1! = 1.

1. Calcolare il numero di anagrammi che possono formarsi con le lettere della parola "ROMA":

$$P_4 = 4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24.$$

2. Sei persone hanno a disposizione sei sedie. In quanti modi diversi le possono occupare ?:

$$P_6 = 6! = 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 720.$$

3. Quanti anagrammi che iniziano con la lettera "M" possono essere composti con le lettere della parola "MELA" ? : *(si tratta di permutazioni di tre elementi)*

$$P_3 = 3! = 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6.$$

4. Scrivere tutti i numeri formati dalle cifre 1 , 2 , 3 non ripetute :

$P_3 = 3! = 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6.$ [e sono: 123, 132, 213, 231, 312, 321 ]

5. In quanti modi si possono trovare disposte le carte di un mazzo da 40 ?
Soluzione : $P_{40}$ = 40! .

6. In quanti modi diversi si possono sistemare in una fila di sedie 5 ragazzi e 6 ragazze, con la condizione che i ragazzi stiano tutti vicini tra loro così come anche le ragazze ?

Soluzione: *Si tratta di un prodotto fra due permutazioni semplici, una riferita ai 5 ragazzi e l'altra alle 6 ragazze; per cui abbiamo:* $P_5$ * $P_6$ = 5! * 6! = 120 * 720 = 86.400.

## COMBINAZIONI SEMPLICI

***Dati n elementi distinti, si dice «combinazione semplice» degli n elementi presi a k a k qualunque gruppo contenente k degli n elementi dati.***

Poiché $D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ allora:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$C_{n,k}$ si indica anche come $\binom{n}{k}$ e si legge «*n su k*»: ***n*** è detto anche *ordine* e ***k*** *classe*.

1. *Quante cartelle occorre giocare al gioco del lotto per avere la certezza di vincere un terno*?
Si tratta di trovare il numero delle combinazioni semplici di 90 elementi presi a 3 a 3 perché sono vincitori tutti i gruppi contenenti 3 dei numeri estratti in qualsiasi ordine.

$$C_{90,3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117.480$$

## COEFFICIENTI BINOMIALI

Il simbolo $\binom{n}{k}$ si chiama ***coefficiente binomiale*** per il ruolo che ha nelle formule del binomio di Newton.

### ALCUNE PROPRIETÀ

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

2 Il numero di combinazioni semplici di *n* elementi presi a *k* a k è uguale al numero di combinazioni di *n* elementi della classe $n-k$, detta "Proprietà di simmetria":

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dimostrazione: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$ e per $K = n-k$ risulta $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)k!}$.

Risulta quindi: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \frac{5!}{0!5!} = 1$; $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\,4!} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$

$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

3. Formula di STIEFEL

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Questa formula risulta utile per comprendere alcuni aspetti dei coefficienti binomiali di Newton.
Per $k-1$ risulta:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

E ancora:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

## FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

La formula permette di conoscere lo svolgimento della potenza $(a+b)^n$ con *n* intero positivo.

Per definizione risulta: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$ per *n* volte.

Per calcolare questo prodotto per prima cosa occorre prendere un termine per ciascun binomio fattore e moltiplicarli tra di essi. Il generico risultato di questa operazione è il seguente:

$$aabbb...ab...ba$$

Se in questo prodotto il fattore *b* compare *k* volte allora il fattore *a* comparirà $n-k$ volte e il tutto potrà essere espresso come:

$$a^{n-k}b^k$$

Per calcolare il risultato totale è necessario sommare i risultati di tutti i possibili prodotti come questo, ovvero per tutti i valori di *k*. Per un determinato *k* il numero dei fattori in cui *b* compare *k* volte è uguale al numero di combinazioni semplici di *n* elementi presi a *k* a *k* [1], cioè $\binom{n}{k}$.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Oppure:

$$(a+b)^n = \sum_0^n {}_k\binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Esempio:

$$\left(a+b\right)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

### IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Il triangolo di Tartaglia è costituito da una successione di numeri dei quali il primo è l'ultimo di ogni riga è 1, e ciascun altro è uguale alla somma dei due numeri immediatamente adiacenti nella riga precedente.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
………………

Si dimostra come i numeri contenuti nella *n*-esima riga (con $n \geq 0$) coincidono con i coefficienti binomiali dello svolgimento di $(a+b)^n$.

Infatti, se $n+1$ è il grado di un dato binomio e $k$ la sua posizione, in base alla formula di STIEFEL risulta:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

cioè, il coefficiente di posizione *k* di un binomio di grado $n+1$ è uguale alla somma dei coefficienti di posizione $k-1$ e della stessa posizione del binomio di grado *n*. Se *n* è la riga ($n = 0$ per la prima) e *k* la posizione vale il triangolo di Tartaglia.

**1.** Risolvere la seguente equazione :

$$\binom{x}{3} + x\binom{x-1}{2} = 16\binom{x-1}{3}$$

Dal significato di coefficiente binomiale sappiamo che la variabile x deve verificare le seguenti disuguaglianze:
$x \geq 3$, $x - 1 \geq 2$ , $x - 1 \geq 3$ => $x \geq 4$
e naturalmente essere un numero naturale. Sviluppiamo i tre coefficienti binomiali presenti e semplifichiamo l'espressione.

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + x\frac{(x-1)}{2!} = 16\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{x}{2} = 16\,\frac{x-3}{6} \Rightarrow 4x = 16x - 48 \Rightarrow x = 4.$$

Il valore ottenuto è accettabile e rappresenta l'unica soluzione dell'equazione.

**2.** Determinare il numero naturale ***n*** che verifica la seguente uguaglianza : $D_{n,\,6} = D_{n,\,5}$.
I simboli che figurano nell'uguaglianza rappresentano disposizioni semplici e quindi deve risultare :

$\boldsymbol{D_{n,\,6} = D_{n,\,5}}$ ⇔ n(n -1) (n -2) (n -3)(n – 4) (n - 5) = n(n -1) (n -2) (n -3)(n – 4) ==> n = 6.

**3.** Determinare il quinto termine dello sviluppo della seguente potenza $\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^8$

Il quinto termine si ottiene con k = 4. Il termine è:

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^8 =$$

$$\binom{8}{0}(2x^2)^8 + \binom{8}{1}(2x^2)^7\left(-\frac{1}{x^3}\right) + \binom{8}{2}(2x^2)^6\left(-\frac{1}{x^3}\right)^2 + \binom{8}{3}(2x^2)^5\left(-\frac{1}{x^3}\right)^3 + \binom{8}{4}(2x^2)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)^4 + \binom{8}{5}(2x^2)^3\left(-\frac{1}{x^3}\right)^5 +$$

$$+\binom{8}{6}(2x^2)^2\left(-\frac{1}{x^3}\right)^6 + \binom{8}{7}(2x^2)\left(-\frac{1}{x^3}\right)^7 + \binom{8}{8}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^8.$$ e cioè:

$$\binom{8}{4}(2x^2)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}\cdot 16\,x^8\cdot\frac{1}{x^{12}} = \frac{1120}{x^4}.$$