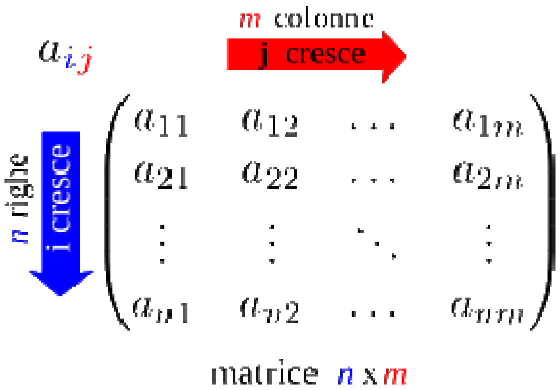
MATRICI E DETERMINANTI

CENNI SUI SISTEMI LINEARI



Consideriamo un insieme di numeri reali rappresentati tra parentesi quadre o tonde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = [a_{ij}] \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Si definisce **matrice** una tabella di numeri reali disposti per righe e per colonne e costituita da m righe ed n colonne. Si dice che tale matrice è del tipo m x n.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$ matrice 2 x 3

Se $m \neq n$ la matrice si dice rettangolare
Se $m = n$ la matrice si dice quadrata, in tal caso non si parla più di tipo, bensì di ordine della matrice

Nota. Le matrici si indicano con le lettere maiuscole, mentre i loro elementi con le minuscole

DEFINIZIONI:

1. Una matrice si dice **nulla** se sono nulli tutti i suoi elementi

$A = 0 \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Due matrici si dicono **dello stesso tipo** se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

A e B sono matrici 2 x 3

Gli elementi di ugual posto nelle suddette matrici si dicono corrispondenti

3. Due matrici dello stesso tipo si dicono **uguali** se sono uguali gli elementi corrispondenti

$A = B \qquad\qquad [a_{ik}] = [b_{ik}]$

4. Si dice **vettore riga** una matrice con un'unica riga $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}]$ del tipo 1xn

5. Si dice **vettore colonna** una matrice con un'unica colonna $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ del tipo m x 1

6. In una matrice quadrata gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la diagonale principale, mentre gli elementi $a_{1n}, \dots, a_{m1}$ costituiscono la diagonale secondaria

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

In rosso la diagonale principale e in blu quella secondaria

7. In una matrice quadrata gli elementi a_{ik} e a_{ki} che hanno gli stessi indici ma invertiti si dicono **coniugati**, essi sono simmetrici rispetto alla diagonale principale

Esempio a_{23} e a_{32} Gli elementi che si trovano sulla diagonale principale sono coniugati di se stessi.

8. La matrice si definisce **simmetrica** se gli elementi coniugati sono fra loro uguali

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

9. la matrice si dice **emisimmetrica** se gli elementi coniugati sono l'uno l'opposto dell'altro

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 \\ -6 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

In tal caso gli elementi della diagonale principale sono necessariamente nulli

10. La matrice quadrata $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è detta **matrice identica** o matrice unità

Gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali ad 1 e tutti gli altri elementi sono nulli

11. La matrice si dice **diagonale** se ha tutti gli elementi uguali a zero, eccetto quelli della diagonale principale

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

Se in particolare risulta $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ allora la matrice si dice scalare.
La matrice identica è una particolare matrice scalare che a sua volta è una particolare matrice diagonale.
La matrice identica si può anche indicare mediante il simbolo di Kronecker

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

12. Due matrici sono dette **simili** se hanno lo stesso numero di righe e di colonne

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i = 1,\ldots,m \\ j = 1,\ldots,n \end{matrix}$$

13. Matrice **triangolare**

Una matrice quadrata A è detta triangolare quando sono nulli tutti gli elementi al di sotto **o** al di sopra della diagonale principale. Nel primo caso la matrice si dirà triangolare superiore, nel secondo caso si parlerà di matrice triangolare inferiore.

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,m} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{m-1,m} \\ 0 & & \dots & 0 & u_{m,m} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{m,1} & l_{m,2} & \dots & l_{m,m-1} & l_{m,m} \end{pmatrix}$$

14. Matrice **trasposta**

Si chiama matrice trasposta di una matrice quella che si ottiene scambiando, ordinatamente, le righe con le colonne. La matrice trasposta si indica con il simbolo A_T

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

Se la matrice A è del tipo m x n, la matrice trasposta sarà del tipo n x m.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà della trasposta:

- La trasposta di una trasposta è la matrice stessa: $(A_T)_T = A$
- Se una matrice è simmetrica, allora essa coincide con la sua trasposta, cioè $A = A_T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Si chiama **matrice opposta** di una data matrice $A = [a_{ij}]$ la matrice dello stesso tipo con tutti gli elementi opposti $-A = [-a_{ij}]$

OPERAZIONI CON LE MATRICI

Somma tra matrici dello stesso tipo

Si chiama somma di due matrici dello stesso tipo la matrice dello stesso tipo ottenuta sommando gli elementi corrispondenti nelle due matrici assegnate.

$$A=[a_{ij}] \qquad B=[b_{ij}] \qquad C=A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma:

1. L'operazione di somma tra matrici dello stesso tipo è una legge interna, in quanto la matrice somma è anche'essa dello stesso tipo.
2. La somma tra matrici è commutativa e associativa:
   commutativa: $A + B = B + A$
   associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Esiste l'elemento neutro della somma che è la matrice nulla
   $$\exists 0 : A + 0 = 0 + A = A$$
4. Esiste la matrice opposta di ogni matrice $\forall A, \exists -A : A+(-A)=0=(-A)+A$

Le matrici con l'operazione di somma così definita costituiscono un **gruppo abeliano**

Differenza tra matrici dello stesso tipo

La differenza tra matrici dello stesso tipo A e B è la somma della matrice A con l'opposto della matrice B.

$$A - B = A + (-B)$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Data una matrice $A = [a_{ij}]$ e un numero reale $r \in R$ si chiama prodotto della matrice per il numero (o del numero per la matrice), la matrice ottenuta moltiplicando per r tutti gli elementi di A.

$$r \cdot A = A \cdot r = [ra_{ij}]$$

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad r = 2 \qquad$ $r \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Proprietà:

1. $r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A$
2. $(r + s)A = rA + sA$
 $(A + B)r = rA + rB$
3. $1A = A$
4. $A + A + ... + A = nA$
5. $rA_T = (rA)_T$

NOTA: Con l'operazione di somma e l'operazione di prodotto esterno così definito, l'insieme delle matrici di tipo m x n costituisce uno **spazio vettoriale**.

Esempio. Verifichiamo che $rA_T = (rA)_T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad r = 3$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad rA_T = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$rA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \qquad (rA)_T = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Prodotto tra due matrici (prodotto righe per colonne)

Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice di tipo m x s e sia $B = [b_{ij}]$ una matrice di tipo s x n.
Le due matrici sono tali che il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. Tali matrici si dicono **conformabili rispetto alla moltiplicazione**.

Si definisce prodotto (righe per colonne) della matrice A di tipo m x s per la matrice B di tipo s x n, la matrice P di tipo m x n il cui generico elemento p_{ij} si ottiene moltiplicando scalarmente la i – esima riga di A per la j – esima colonna di B.

$$P = A \cdot B \Leftrightarrow p_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{array}$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto tra matrici:

1. Distributiva a destra : $A(B+C) = AB + AC$

2. Distributiva a sinistra: $(B+C)A = BA + CA$

3. Associativa: $A(BC) = (AB)C$

4. Trasposta del prodotto: $(AB)_T = B_T \cdot A_T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_T \cdot A_T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Non commutatività: il prodotto tra matrici **non è in genere commutabile**, $AB \neq BA$

6. Esistenza dell'elemento neutro: la matrice identica è commutabile con qualsiasi altra matrice quadrata dello stesso rodine e si ha che

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

da ciò si afferma che la matrice identica è elemento neutro rispetto al prodotto tra matrici

7. $A \cdot 0 = 0$ tale proprietà non è invertibile, nel senso che se il prodotto tra due matrici è la matrice nulla, non necessariamente una delle due matrici deve essere nulla. Quindi si dice che **non vale la legge di annullamento del prodotto**.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad AB = 0$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$

8. Per le matrici **non vale la legge di semplificazione del prodotto**:

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{ma} \quad B \neq C$$

Esercizi:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(AB)_T$

2) Determinare x e y in modo tale che sia:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata

Sia $A = [a_{ik}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}$ una matrice quadrata di ordine n.

Ad essa è possibile associare un valore numerico detto DETERMINANTE della matrice quadrata.

$$\det A = |a_{ik}| = |A|$$

NOTA: Il simbolo con cui si indica il determinante non va confuso con quello di valore assoluto. Il determinante di uan matrice può essere anche negativo.

NOTA: non ha senso parlare di determinante per matrici rettangolari. Il determinante si definisce solo per matrici quadrate.

NOTA: Forniremo le regole di calcolo del determinante per matrici di ordine 1, 2, 3, …, n

Determinante di una matrice quadrata di ordine 1

Sia $A = [a_{11}]$. Nel caso di matrici di ordine 1 il determinante è il numero stesso, ossia l'unico elemento di cui è costituita la matrice.

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Esempio.

$$A = [4] \Rightarrow |A| = 4$$

$$A = [-2] \Rightarrow |A| = -2$$

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ il determinante di una matrice quadrata di ordine 2 è il numero che si ottiene dalla differenza del prodotto tra gli elementi della diagonale principale con quello degli elementi della diagonale secondaria

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$

Esercizi:

1. Calcola il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} \qquad E = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

2. Risolvere l’equazione: $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Minore complementare di un elemento di matrice

Considero la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ prendiamo un elemento a_{ik} della matrice

ed escludiamo dalla matrice la i – esima riga e la k- esima colonna

Ad esempio

a_{12}

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \cancel{\dots} & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cancel{a_{n2}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rimarrà una matrice di ordine n – 1 $\begin{pmatrix} a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Il determinante di questa matrice si chiama MINORE COMPLEMENTARE dell'elemento scelto

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad a_{13} = -1$$

Elimino la prima riga e la terza colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

Classificazione degli elementi

Prendiamo un elemento a_{ik}, se $i+k=\text{pari} \Rightarrow a_{ik}$ si dice di classe pari

se $i+k=\text{dispari} \Rightarrow a_{ik}$ si dice di classe dispari

Complemento algebrico dell'elemento a_{ik}

Il complemento algebrico del'elemento a_{ik} non è altro che il minore complementare dell'elemento a_{ik} preceduto dal segno + o dal segno – a seconda che l'elemento considerato sia di classe pari o di classe dispari.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Determinante di una matrice quadrata di ordine n>2

Il determinante di una matrice quadrata di ordine n > 2 è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

$$\det A = |A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn}$$ fissando la riga k

$$\det A = |A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$$ fissando la colonna k

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^2 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^3(-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^4 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4+2) + 1(0-6) + 3(0-3) = 12 - 6 - 9 = -3$$

Si può provare che si ottiene lo stesso risultato anche scegliendo righe o colonne diverse.

Regola di Sarrus (solo per matrici 3 x 3)

Per le matrici 3 x 3 esiste un procedimento più semplice per il calcolo del determinante.
Si scrivono gli elementi della matrice e si aggiungono a destra della matrice le prime due colonne della matrice stessa. Si considerino poi la diagonale principale e le sue parallele (in rosso) e la diagonale secondaria e le sue parallele (in blu).

$$det\,A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

Il determinante è dato dalla somma del prodotto della diagonale principale con i prodotti delle sue parallele da cui si sottrae il prodotto della diagonale secondaria con i prodotti delle sue parallele.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{matrix} = -4-4-6+6-1-16=-25$$

OSS. Ricordiamo il determinante simbolico che permette di determinare il prodotto vettoriale tra vettori, note le loro tre componenti spaziali.

Esempio di calcolo del determinante di una matrice quadrata 4 x 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 45$$

Nota: per il calcolo del determinante conviene scegliere la riga o la colonna che contiene il maggior numero di zeri, in modo tale da ridurre notevolmente i calcoli.

Proprietà dei determinanti

1. Il determinante della matrice è uguale al determinante della sua trasposta

$$|A| = |A_T|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad |A_T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2. Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli, il determinante è nullo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$ applicando Sarrus si vede che $|A| = 0$

3. Scambiando fra loro due righe (o due colonne) il determinante cambia segno

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$ scambiamo la prima colonna con la seconda

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

4. Se in una matrice quadrata due righe o due colonne sono proporzionali (in particolare uguali) il determinante della matrice è nullo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$ la prima e la terza colonna sono proporzionali

calcolando con Sarrus tale determinante si prova che $|A| = 0$

5. Se si moltiplicano gli elementi di una linea di una matrice quadrata per uno scalare k, il determinante della matrice resta moltiplicato per lo scalare k.

$$|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,|A|$$

6. **Teorema di Binet.** Date due matrici quadrate dello stesso ordine, A e B, e detto C il loro prodotto, il determinante della matrice è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici A e B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 4 \qquad \det B = -6 \qquad \det(AB) = -24$$

7. Se agli elementi di una riga (o di una colonna) si sommano quelli corrispondenti di un'altra riga (o colonna), tutti moltiplicati per una stessa costante, il determinante non cambia.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -20$$ sommiamo alle seconda riga la terza moltiplicata per -2

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

Tale proprietà è utile per semplificare il calcolo del determinante, cercando cioè di ottenere righe o colonne con un elevato numero di zeri.

8. Se una riga (o colonna) è combinazione lineare di due o più altre parallele, il determinante è nullo.

Determinanti notevoli

1. Determinante di una matrice diagonale

Il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$$|A| = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Dimostrazione:
Dimostriamolo per semplicità per una matrice diagonale di ordine 3, sapendo che il risultato è però più generale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante di A scegliamo indifferentemente una riga o una colonna qualsiasi. Osserviamo subito che in tutte le righe o le colonne gli elementi sono tutti nulli eccetto uno. Ad esempio, scegliendo la prima riga si ha che:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

2. <u>Determinante di una matrice scalare</u>

Se la matrice è scalare, il suo determinante è dato dalla potenza n – esima (pari all'ordine della matrice stessa) dell'elemento che si ripete lungo la diagonale principale.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3^4 = 81$$

3. **<u>Determinante della matrice identità.</u>** $|I| = 1$ essendo una particolare matrice scalare.

4. Determinante di una matrice triangolare

Il determinante di una matrice triangolare è dato dal prodotto degli elementi che compongono la diagonale principale, così come avviene per le matrici diagonali.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

In generale se l'ordine è n $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

5. Determinante del prodotto di uno scalare per una matrice quadrata

Se r è uno scalare e A una matrice quadrata di ordine n, si ha che il determinante del prodotto di uno scalare per una matrice è uguale al determinante di A per la potenza n – esima dello scalare r.

$$|rA| = r^n |A|$$

Esercizi. (svolti in aula)

Matrice inversa di una matrice quadrata

Si definisce **matrice inversa** di una matrice quadrata A, di ordine n, una matrice, se esiste, anch'essa quadrata di ordine n, tale che moltiplicata a destra e a sinistra per A dia come risultato la matrice identica.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Se una matrice ammette inversa si dice che è invertibile.

Teorema dell'unicità dell'inversa

L'inversa di una matrice quadrata, se esiste, è unica.

C.N.S. sull'esistenza della matrice inversa.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della matrice inversa di una matrice quadrata A è che $\det A \neq 0$

Infatti, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Leftrightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| \Leftrightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

Pertanto $|A| \neq 0$

Regole per calcolare la matrice inversa

La matrice inversa A^{-1} di una matrice A è uguale al rapporto tra la trasposta della matrice formata dai complementi algebrici della matrice data e il determinante della matrice stessa.

$$A^{-1} = \frac{A_T^*}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

dove $A_T^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ in cui A_{ij} rappresentano i complementi algebrici degli elementi della matrice A

Per calcolare la matrice inversa è necessario **seguire il seguente procedimento**:

1) Calcolare il determinante della matrice A, in quanto se fosse nullo, non avrebbe alcun significato ricercarne l'inversa.
2) Calcolare la matrice A^* dei complementi algebrici
3) Determinare la trasposta della matrice A^*, $A^*{}_T$
4) Dividere la matrice $A^*{}_T$ per il determinante della matrice A.

Esempio:

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolarne l'inversa

Innanzitutto valutiamo il determinante di A

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ A è una matrice non singolare

Calcoliamo la matrice A*, ossia la matrice dei complementi algebrici

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5 \qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(-2-1)=3 \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=(-1)^{-4}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5$$

Pertanto $A^*=\begin{pmatrix}5 & 3 & -4\\ -4 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^*_T=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}$

Infine: $A^{-1}=\dfrac{A^*_T}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{11} & \frac{-4}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{-1}{11}\\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11}\end{pmatrix}$

Proprietà dell'inversione

$$(A^{-1})^{-1}=A \qquad (A_T)^{-1}=(A^{-1})_T \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Sottomatrici

Si consideri una matrice m x n. Le sottomatrici sono matrici p x q con $1 \le p \le m$ e $1 \le q \le n$ che derivano dalla matrice data scegliendo da questa alcune righe e alcune colonne.

Esempio: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideri ora di questa matrice una sottomatrice scegliendo come elementi le intersezioni della 1° e 3° riga con la 2°, 4° e 5° colonna.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Minore di una matrice

Sia A una matrice di tipo m x n. Fra tutte le sottomatrici di A si considerino quelle quadrate di ordine p. Si chiama minore di ordine p di una matrice A il determinante di una qualsiasi sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A.

Oss. L'estrazione avviene sopprimendo alcune righe e alcune colonne dalla matrice A.
Si osserva inoltre che i minori non possono avere ordine superiore al minimo valore tra m ed n.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Minori di ordine 1: $|1|;|-2|;|5|;\ldots$

Minori di ordine 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3$ ....

Minori di ordine 3 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ....

Rango o caratteristica di una matrice

Si definisce rango o caratteristica di una matrice m xn il massimo ordine dei minori non nulli.

Esempio. Nell'esempio citato precedentemente, la matrice può avere al massimo rango 3, in quanto non è possibile estrarre minori di ordine maggiore. Abbiamo osservato che due minori di ordine 3 sono nulli, ma si può verificare che anche tutti gli altri minori di ordine 3 sono nulli, pertanto il rango non può essere 3. Abbiamo trovato minori di ordine 2 non nulli, pertanto il rango è 2.

Oss: Se A è una matrice quadrata di ordine n, il suo rango è n se e solo se il determinante della matrice non è nullo.

Esempio. Si determini il rango della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice deve essere minore o uguale a 3.
Si osserva che la seconda e la terza colonna sono tra loro proporzionali, pertanto un qualunque minore di ordine 3 sarà necessariamente nullo.

Si consideri quindi il minore $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Pertanto il rango della matrice è 2.

Esempio.
Discutere il rango della seguente matrice al variare del parametro a.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a-1 & 0 \\ a & 2a-2 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

Essendo A una matrice quadrata di ordine 3, il rango può essere al più 3.

Se Rango = 3 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a-1 & 0 \\ a & 2a-2 & 2a-2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Rightarrow a\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 2a-2 & 2a-2 \end{vmatrix} = a(a-2)(2a-2) = 2a(a-1)^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 1$$

Pertanto per tutti i valori del parametro a diversi da 0 e 1 il rango è 3.
Analizziamo cosa accade nel caso in cui a = 0 e a = 1

Se a = 0 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ l'unico minore di ordine 2 non nullo è $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

in tal caso il rango è 2.

Se a = 1 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Non è possibile individuare nessun minore di ordine 2 non nullo,

pertanto il rango è 1.

SISTEMI LINEARI E MATRICI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

forma normale o canonica di un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

Il sistema si dirà omogeneo se tutti i termini noti sono uguali.

Si definisce soluzione del sistema ogni n – pla ordinata $(c_1, \ldots, c_n)$ di numeri tali che le equazioni del sistema siano contemporaneamente soddisfatte.

Forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti — vettore delle incognite — vettore dei termini noti

$$(*) \Leftrightarrow Ax = b$$

In generale non è possibile fornire un algoritmo preciso per la risoluzione di un sistema lineare. Se $m \neq n$ è possibile solo indicare l'esistenza o meno di soluzioni mediante un teorema noto come teorema di Rouché – Capelli.
Se però il numero di equazioni coincide con il numero delle incognite, allora è possibile considerare il seguente metodo

<u>Metodo della matrice inversa</u>

Se la matrice A dei coefficienti è una matrice quadrata non singolare, ossia con $|A| \neq 0$*, allora il sistema ammette una e una sola soluzione* $x = A^{-1}b$

Infatti se $|A| \neq 0$, allora esiste la matrice inversa di A, A^{-1}.
Pertanto si può scrivere $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

<u>Esempio.</u> Risolvere il sistema $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$ mediante il metodo della matrice inversa.

Scriviamo il sistema in forma matriciale $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

la matrice A non è singolare, pertanto il sistema ammette una e una sola soluzione

Si calcola l'inversa e si ottiene .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

effettuando il prodotto righe per colonne.

Quindi le soluzioni del sistema sono $x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = 3$