FUNZIONI CONTINUE. PUNTI DI DISCONTINUITA'. OPERAZIONI SUI LIMITI. CALCOLO DI LIMITI CHE SI PRESENTANO IN FORMA INDETERMINATA LIMITI NOTEVOLI E APPLICAZIONI

DEF. di Funzione Continua in un punto x_0

Sia y = f(x) una funzione reale di variabile reale

$$y = f(x) \text{ è continua in } x_0 :\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_0 \in D_f \text{, ossia } \exists f(x_0) \\ 2) \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{finito} \\ 3)\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] se e solo se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Esempio. Determina per quali valori dei parametri a e b la funzione risulta continua su tutto R.

$$y = f(x) = \begin{cases} 6x + b & x \le 1 \\ -x + 12 & 1 < x < 4 \\ 3x + a & x \ge 4 \end{cases}$$

Innanzitutto si osserva che per ogni x diverso da 1 e 4 le funzioni sono certamente continue, in quanto polinomi. Il problema può sorgere negli estremi degli intervalli in cui è definita a tratti la funzione, ossia in 1 e in 4.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 6x + b = 6 + b \qquad f(1) = 6 + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -x + 12 = -1 + 12 = 11 \qquad \Rightarrow 6 + b = 11 \Rightarrow b = 5$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} -x + 12 = -4 + 12 = 8$$

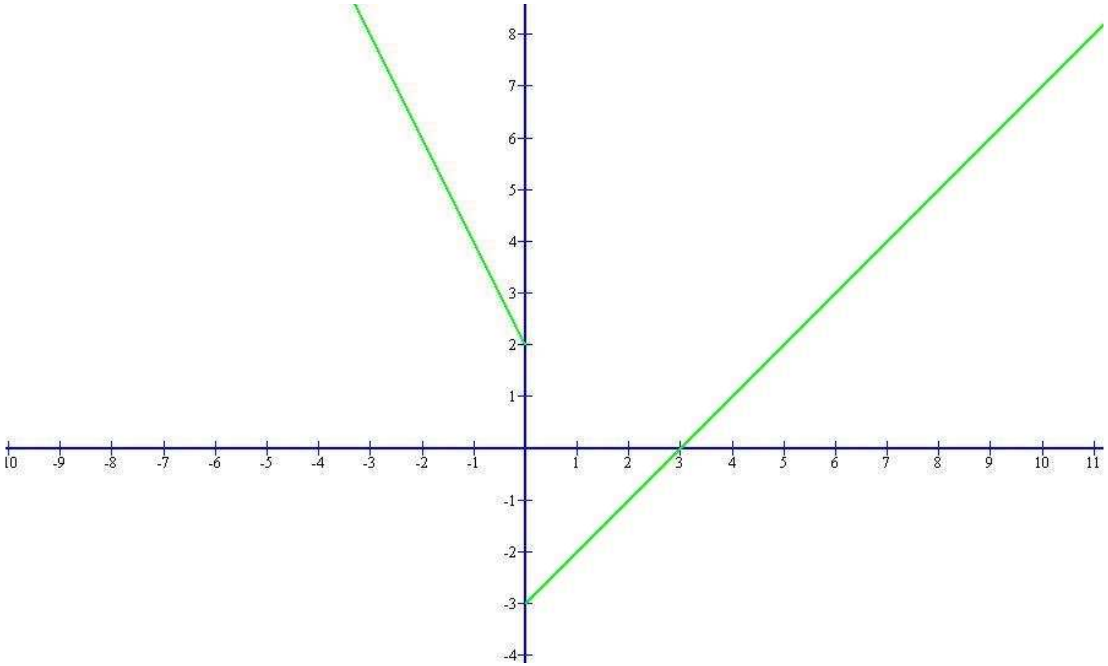
$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 3x + a = 12 + a \qquad f(4) = 12 + a$$

$$\Rightarrow 12 + a = 8 \Rightarrow a = -4$$

TIPI DI DISCONTINUITA'

Discontinuità di I specie

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 0 \\ -2x + 2 & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - 3 = -3$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x + 2 = 2$$

La funzione non è continua in x = 0. Si dice che presenta una discontinuità di **prima specie**, in quanto il limite destro e il limite sinistro esistono finiti, ma sono diversi: $\ell_1 \neq \ell_2$ finiti

In x = 0 la funzione presenta un salto. Salto = $|\ell_1 - \ell_2|$ = 5

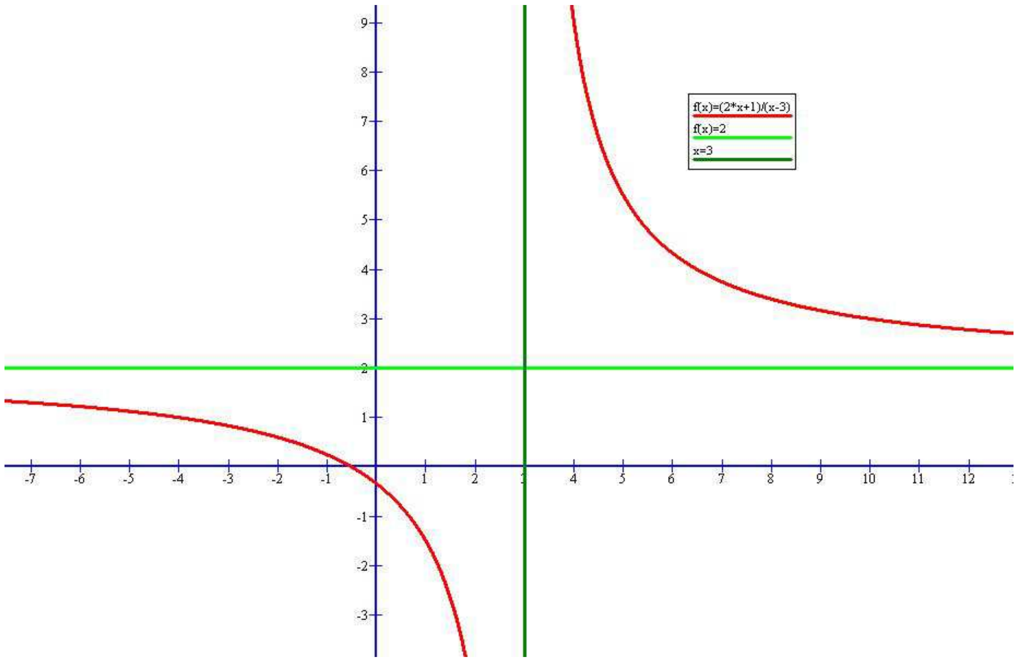
Discontinuità di II specie

Una funzione presenta in $x = x_0$ una **discontinuità di II specie** se in x_0 non esiste il limite o almeno uno dei due limiti, destro e sinistro, è infinito.

$$y = f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

Nel punto 3 la funzione non è definita



$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

Il limite destro e sinistro sono infiniti.

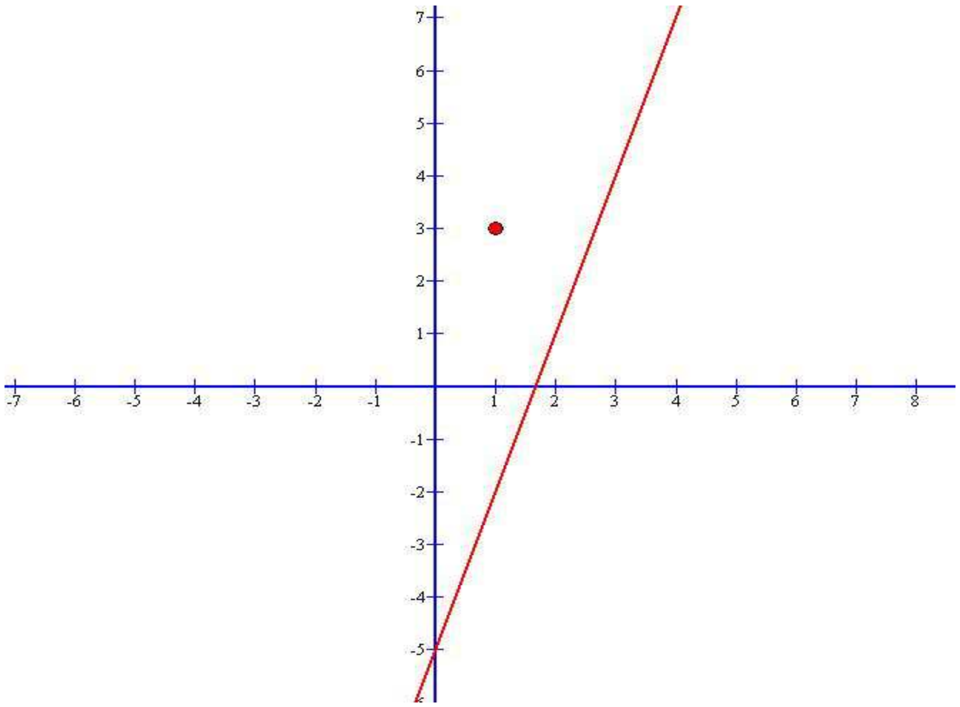
Esempio: $y = tg\, x$ in $x = \pi/2$

Discontinuità di III specie o eliminabile

Una funzione nel punto $x = x_0$ presenta una discontinuità di III specie se esiste finito il limite della funzione per x che tende a x_0, ma o non esiste $f(x_0)$ oppure il limite è diverso da $f(x_0)$.

$$y = \begin{cases} 3x - 5 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} 3x - 5 = \lim_{x \to 1^-} 3x - 5 = -2$$



$$f(1) = 3 \neq \lim_{x \to 1} f(x)$$

Costruisco un prolungamento della funzione f(x)

$$y = g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 5 & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$$

OPERAZIONI SUI LIMITI

Teorema 1: $$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty + \ell = +\infty$

$-\infty + \ell = -\infty$

$(+\infty - \infty)$ forma indeterminata

Forma indeterminata: il risultato non è prevedibile a priori

Oss. La somma di funzioni continue è una funzione continua

Teorema 2: $$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Teorema 3: $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

$$\ell\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \ell>0 \\ -\infty & \ell<0 \end{cases} \qquad \ell\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty & \ell>0 \\ +\infty & \ell<0 \end{cases}$$

Oss. Il prodotto di funzioni continue è una funzione continua.

	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln(x)\cdot e^x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(\log_3(x)\cdot \log_{\frac{1}{2}}(x)) = -\infty$$

$(0\cdot\infty)$ forma indeterminata

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

Teorema 4: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ell \in R, \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Esempi: $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Teorema 5: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ con $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Oss. Il quoziente di funzioni continue in un punto x_0 è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

$$\frac{\ell}{\pm\infty} = \begin{cases} 0^{\pm} & \ell > 0 \\ 0^{\mp} & \ell < 0 \end{cases} \qquad \frac{\ell}{0^{\pm}} = \begin{cases} \pm\infty & \ell > 0 \\ \mp\infty & \ell < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$ forme indeterminate

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Teorema 6: Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \ell^n$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = +\infty$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = +\infty, n \text{ pari} \\ \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = -\infty, n \text{ dispari} \end{cases}$

Oss. Le funzioni polinomiali sono funzioni continue

$(\infty)^0 \qquad (1)^\infty \qquad (0)^0$ forme indeterminate

Invece $(0^+)^{+\infty} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right)^{+\infty} = 0^+ \qquad (0^+)^{-\infty} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right)^{-\infty} = +\infty$

$\left(0^-\right)^{\pm\infty}$ non è definito in quanto la base non può essere negativa

Teorema 7: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ell \in R, \ell > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}, n \text{ pari}$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ell \in R \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}, n \text{ dispari}$

Ora vediamo come risolvere le forme indeterminate per calcolare i limiti

✓ La forma indeterminata $(+\infty - \infty)$

1) $\lim_{x \to +\infty} 3x^2 - 2x + 1 = (+\infty - \infty) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Raccolgo il termine di grado massimo

2) $$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = (+\infty - \infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+1}) \cdot (x + \sqrt{x^2+1})}{(x + \sqrt{x^2+1})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{(x + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2+1})} = 0$$

Ricordiamo il prodotto notevole: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

✓ La forma indeterminata $(0 \cdot \infty)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\cos^2 x \cdot tgx] = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} = \left(\cos^2 x \cdot \frac{senx}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot senx) =$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

✓ La forma indeterminata $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

1) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{5x^3 - 6x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(5 - \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{5x} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-7x^3-x+2}{3x^3-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(-7-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-7x^3}{3x^3}=-\frac{7}{3}$$

In generale:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_0}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\infty & n>m\\ 0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\end{cases}$$

Il segno di ∞ dipenderà, oltre che dal segno di infinito come punto di accumulazione, anche dal prodotto dei segni dei coefficienti dei termini di grado massimo.

2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

✓ La forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$

bisogna fattorizzare per semplificare il fattore che induce la forma di indecisione

1) $$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+3x-10}{x^2-25}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(x-2)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to-5}\frac{x-2}{x-5}=\frac{7}{10}$$

2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Per scomporre il numeratore applichiamo Ruffini

	2	-1	-5	-2
2		4	6	2
	2	3	1	0

Pertanto: $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x-2)(2x^2 + 3x + 1)$

Per scomporre il denominatore che è di II grado, utilizziamo la formula risolutiva per determinare le radici e poi ricordiamo che

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Radici del denominatore: $x = 2 \vee x = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$$

Il limite diventa pertanto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x^2 + 3x + 1)}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2 + 3x + 1)}{(2x-1)} = 5$$

LIMITI NOTEVOLI

Ricordiamo $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=1$ $\qquad \text{sen}x \sim x$ (passaggio all'asintotico)

Da esso derivano altri due limiti notevoli:

- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

Dimostriamoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=$$

1)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x\cdot\text{sen}x}{x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{(1+\cos x)}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

2)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}x}{x\cdot x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

Applicazioni:

calcoliamo i seguenti limiti in due modi, con il primo metodo evidenzieremo ed utilizzeremo i limiti notevoli, con il secondo metodo effettueremo il passaggio all’asintotico:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x+5x}{x+2\operatorname{sen}x}=2$

1° metodo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x + 5x}{x + 2\operatorname{sen}x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x} + 5\right)}{x\left(1 + 2\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)} = \dfrac{6}{3} = 2$

2° metodo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x + 5x}{x + 2\operatorname{sen}x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 5x}{x + 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x}{3x} = 2$

poiché per x tendente a zero $\operatorname{sen}x \sim x$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \operatorname{tg}x \sim x$

Calcoliamolo:

1° metodo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$

2° metodo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x\cos x} = 1$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

1° metodo: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$ in quanto $x\to 0\Rightarrow 5x\to 0$

2° metodo: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$ in quanto $\operatorname{sen}5x\sim 5x$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$$

1° metodo: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

2° metodo: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$ poiché $\operatorname{sen}x\sim x$ e $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ per $x\to 0$

- ✓ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ limite notevole (generalizzazione del limite di successione da cui discende la definizione di numero di Nepero)

- ✓ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ $\Rightarrow \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\Rightarrow \ln(1+x)\sim x$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $\Rightarrow a^x-1\sim x\ln a$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\Rightarrow e^x-1\sim x$

Dimostriamoli

1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$ Abbiamo effettuato un cambio di variabile e

si è posto $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

inoltre per $x \to 0 \Rightarrow y \to \infty$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln e} = 1$ caso particolare

4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$ Poniamo $y = a^x - 1 \Rightarrow a^x = 1 + y \Rightarrow x = \log_a(1+y)$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a$$ per il limite precedente

5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$ caso particolare

Ancora un limite notevole

✓ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ $\quad\Rightarrow (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha\sim\alpha x+1$$

Applicazioni

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}=\frac{1}{2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=3\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{4x}}-1}{\sqrt{x}}=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{2x-2}=\frac{e}{2}\qquad \lim_{x\to -2}\frac{e^{2x+4}-1}{x+2}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1-e^{\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$$

Limite di una funzione composta:

Siano $y=f(z)$ e $z=g(x)$ due funzioni tali che

1) $g(x)\in D_f, \forall x\in D_g$

2) $f(z)$ è continua in z_0 $\qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to\alpha} f(g(x))=f(\lim_{x\to\alpha} g(x))=f(g(z_0))$

3) $\lim_{x\to\alpha} g(x)=z_0$