FUNZIONI PERIODICHE
FUNZIONI GONIOMETRICHE E GONIOMETRICHE INVERSE
CENNI DI TRIGONOMETRIA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE
GRAFICI DEDUCIBILI

DEF. Una funzione si definisce periodica se e solo se

$\exists T > 0$ tale che

1) $\forall x \in D \Rightarrow x + T \in D$

2) $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$

Il più piccolo dei numeri T per cui valga tale proprietà è detto PERIODO della funzione.

In tal caso vale anche

$$f(x+kT) = f(x) = f(x-kT)$$

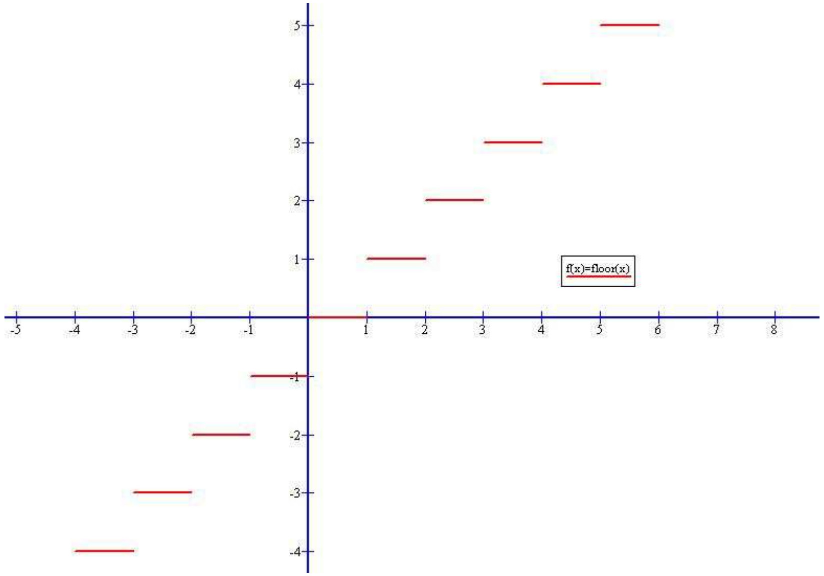
✓ La danza delle api

Funzione parte intera

$$x \to [x]$$

Ad ogni numero reale x associa l'intero minore o uguale ad x più vicino

[-2,13]=-3 [3,4]=3 [0,7]=0



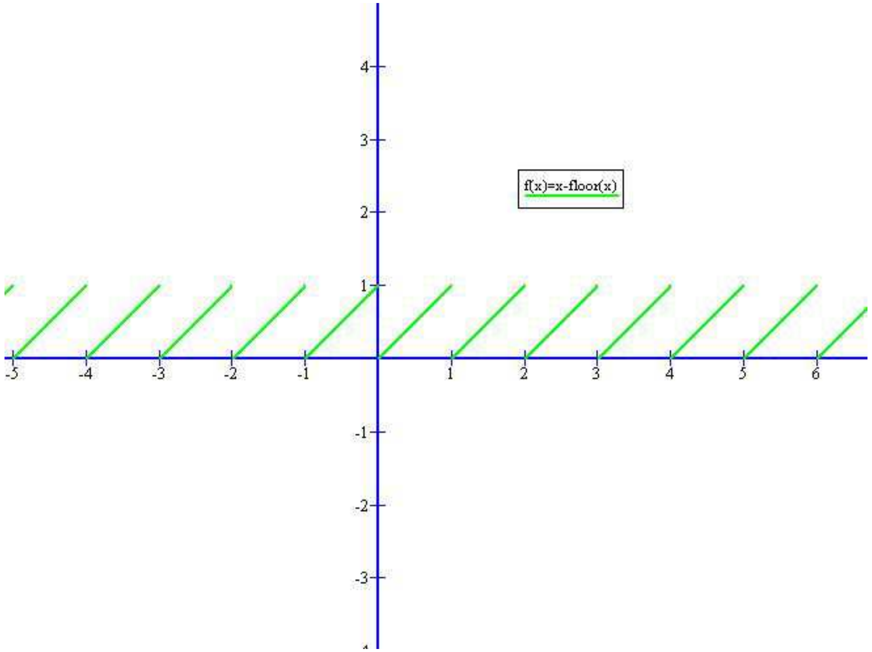
Funzione mantissa

$$x \to x - [x]$$

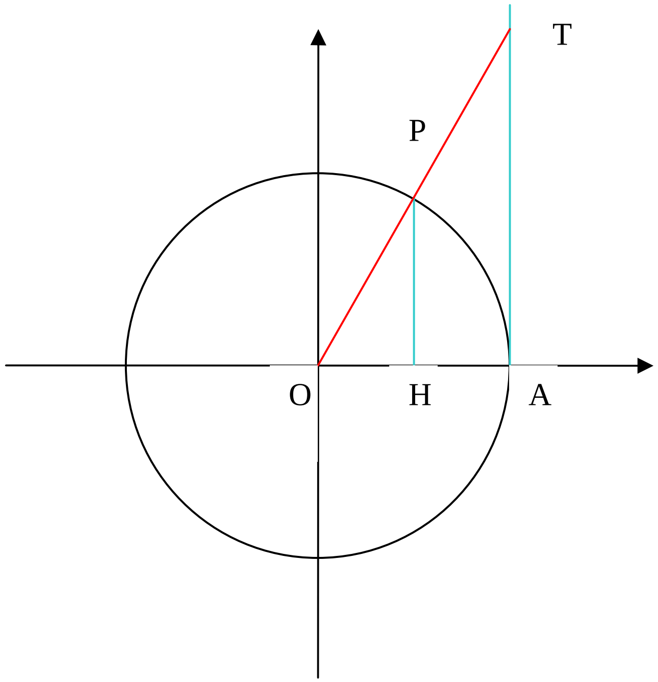
Tale funzione restituisce la parte frazionaria di un numero.

- Coincide con y = x per $x \in [0,1[$
- È periodica di periodo T = 1 (dim.)
- Assume tutti i valori nell'intervallo $[0,1[$

E' detta funzione " a denti di sega"



FUNZIONI GONIOMETRICHE



$$\sin\alpha = \frac{PH}{OP} = y_P$$

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = x_P$$

$$tg\alpha = \frac{TA}{OA} = \frac{PH}{OH} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = y_T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Relazioni fondamentali:

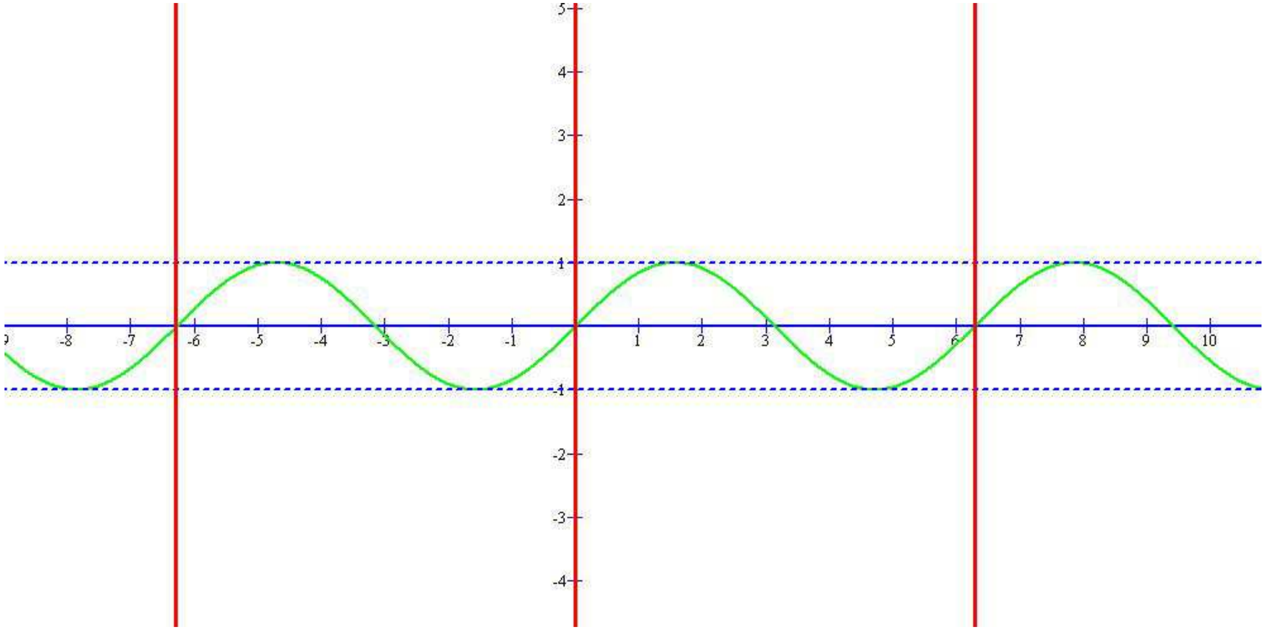
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

- ✓ Variazione del segno delle funzioni goniometriche nei quadranti
- ✓ Valori assunti in corrispondenza di angoli particolari (0°, 90°, 180°, 270°)
- ✓ Definizione di radiante
- ✓ Valori opposti e valori uguali (angoli associati)
- ✓ Valori delle funzioni goniometriche in relazione ad angoli di 30°, 45°, 60°

Grafici di funzioni goniometriche

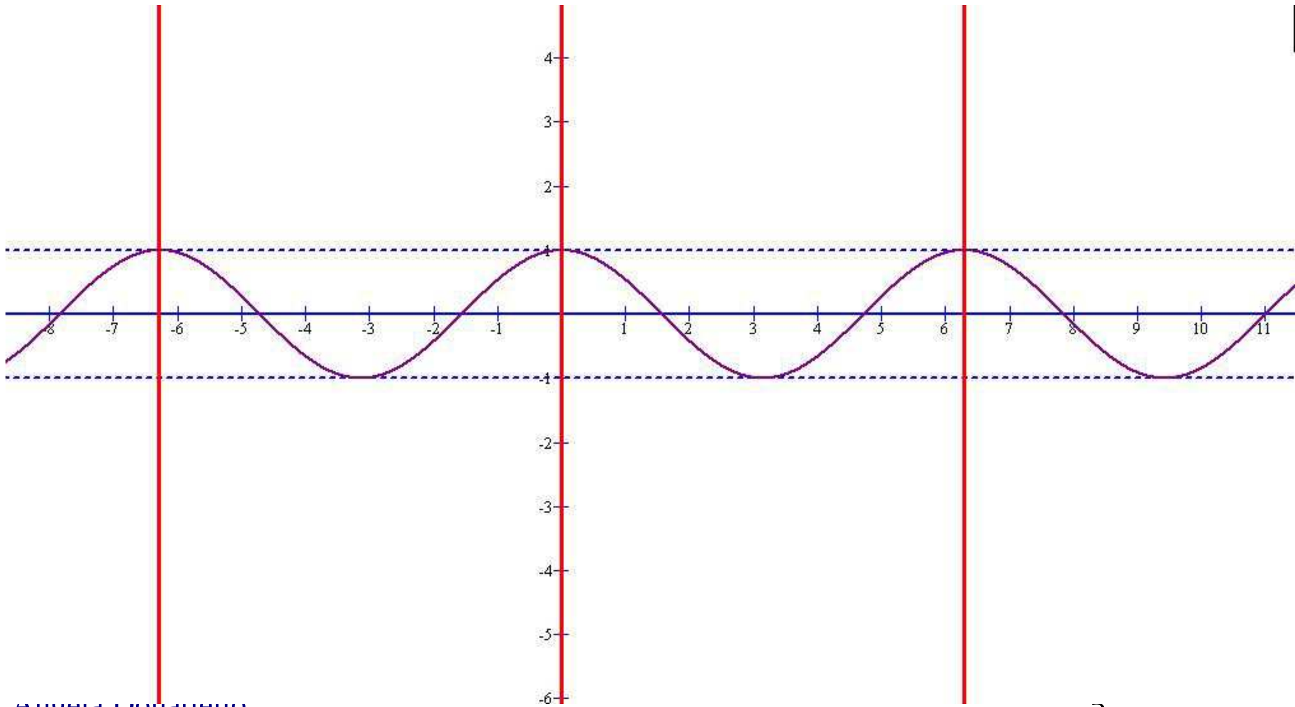
y = sin x

- ✓ D = R
- ✓ C = [-1;1]
- ✓ Periodica T = 2π
- ✓ Funzione dispari
  sin(-x) = - sin (x)
- ✓ Funzione non iniettiva



y = cos x

- ✓ D = R
- ✓ C = [-1;1]
- ✓ Periodica T = 2π
- ✓ Funzione pari
  cos (- x) = cos (x)
- ✓ Funzione non iniettiva

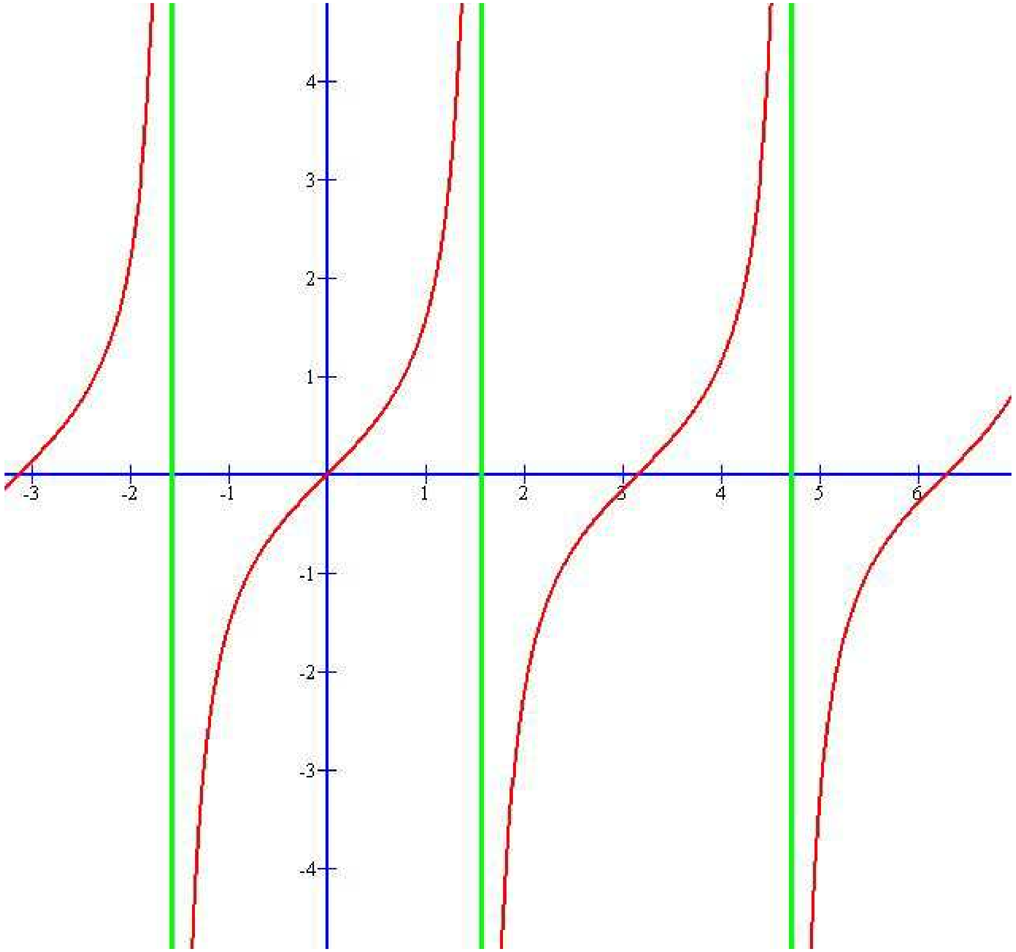


y = tg x

- ✓ Periodica di periodo $k\pi$ (dim.)
- ✓ D =

$$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$$

- ✓ C = R
- ✓ Asintoti: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- ✓ Funzione monotona crescente in senso stretto in un periodo, ma non invertibile
- ✓ Funzione dispari
  tg(-x) = - tg(x)

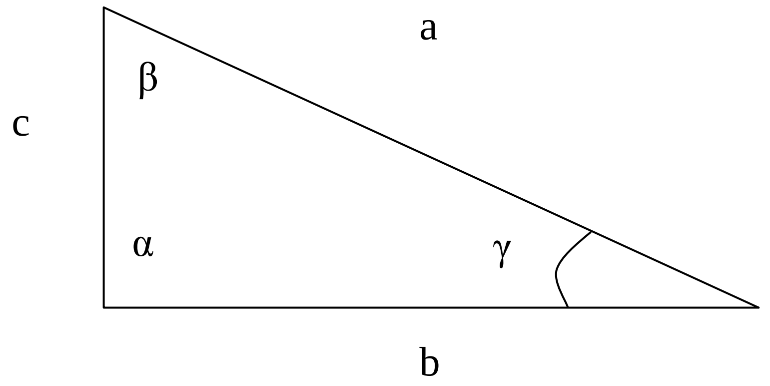


TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

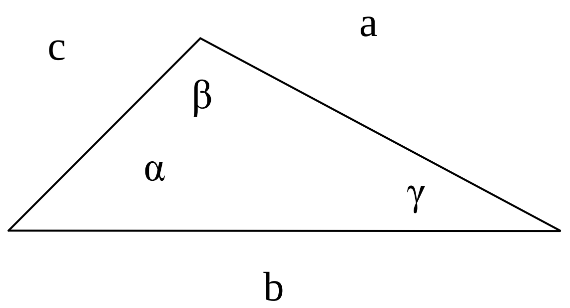
$c = a \sin \gamma = a \cos \beta$

$b = a \cos \gamma = a \sin \beta$

$c = b \, tg \, \gamma \qquad b = c \, tg \, \beta$



TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALUNQUE



Teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Teorema di Carnot o del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

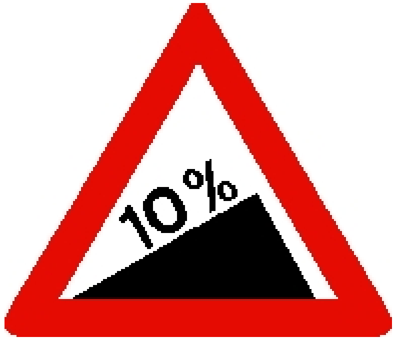
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

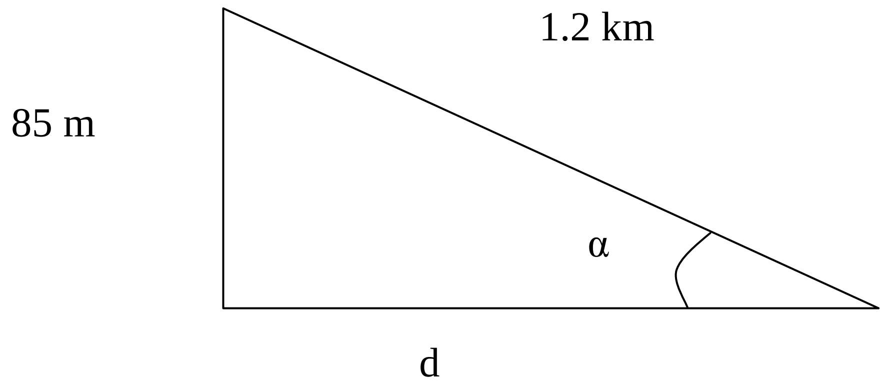
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

✓ Strada in salita

Un tratto di strada sale per 1.2 km, superando un dislivello di 85m.

Come si valuta la pendenza? Qual è la percentuale da riportare sul cartello?





$$d = \sqrt{(1200)^2 - (85)^2}\,m \cong 1197m$$

$$\tan\alpha = \frac{85m}{1197m} = 0{,}0710 = 7.1\%$$

Equazioni e disequazioni goniometriche:

- ✓ $2\operatorname{sen}x - 1 = 0$
- ✓ $2\cos x - \sqrt{2} > 0$
- ✓ $\operatorname{tg}2x < 1$
- ✓ $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 < 0$

elementari

- ✓ $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}x - 1 < 0$

riconducibili ad elementari

- ✓ $\operatorname{sen}x + \cos x + 1 < 0$
- ✓ $\operatorname{sen}x - \sqrt{3}\cos x > 0$
- ✓ $\sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x - \sqrt{3} > 0$

lineari (metodo angolo aggiunto)

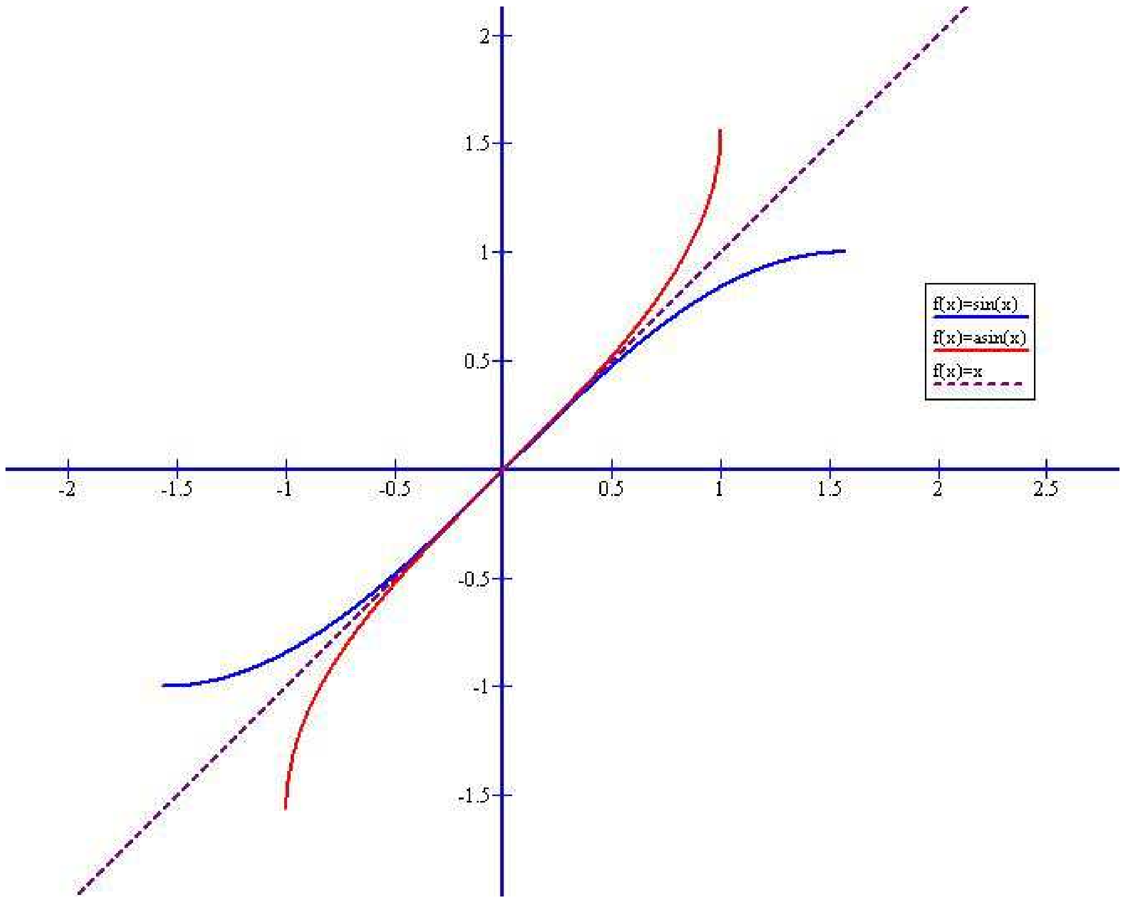
FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

y = arcsinx

La funzione seno non è invertibile, pertanto si restringe il suo dominio effettuando un taglio nell'intervallo

$$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

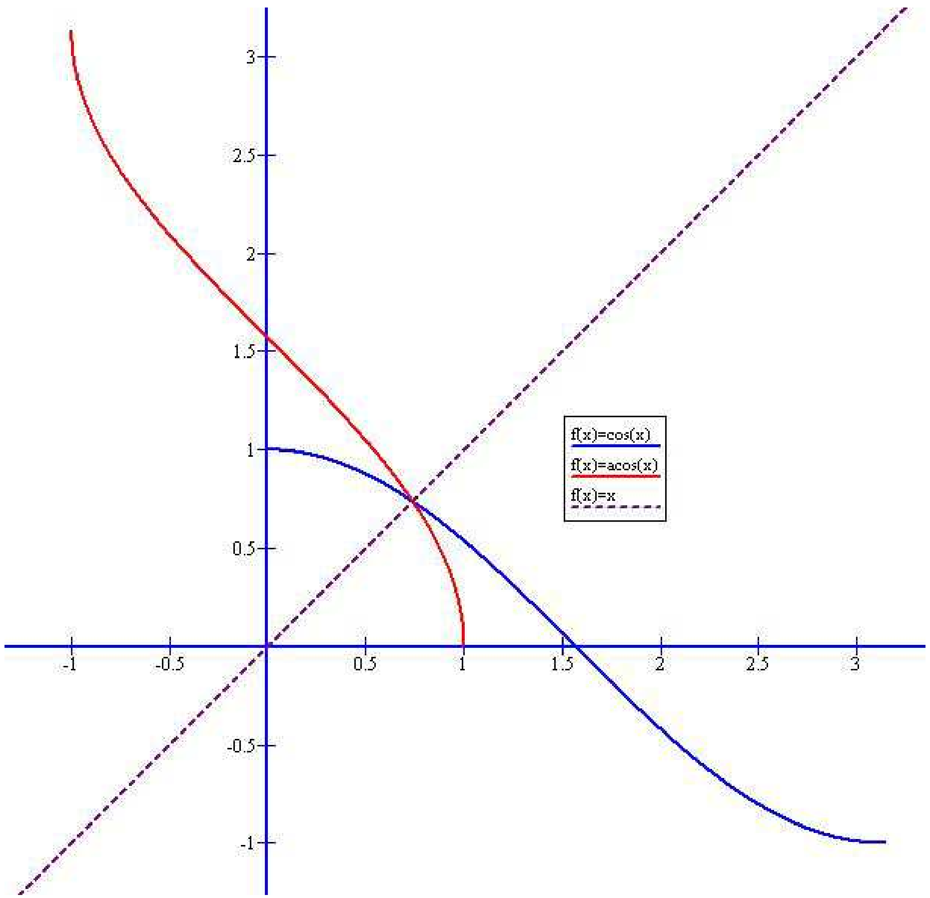
$$\arcsin x:[-1;1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$



y = arccosx

La funzione coseno non è invertibile, pertanto si restringe il suo dominio effettuando un taglio nell'intervallo $[0;\pi]$

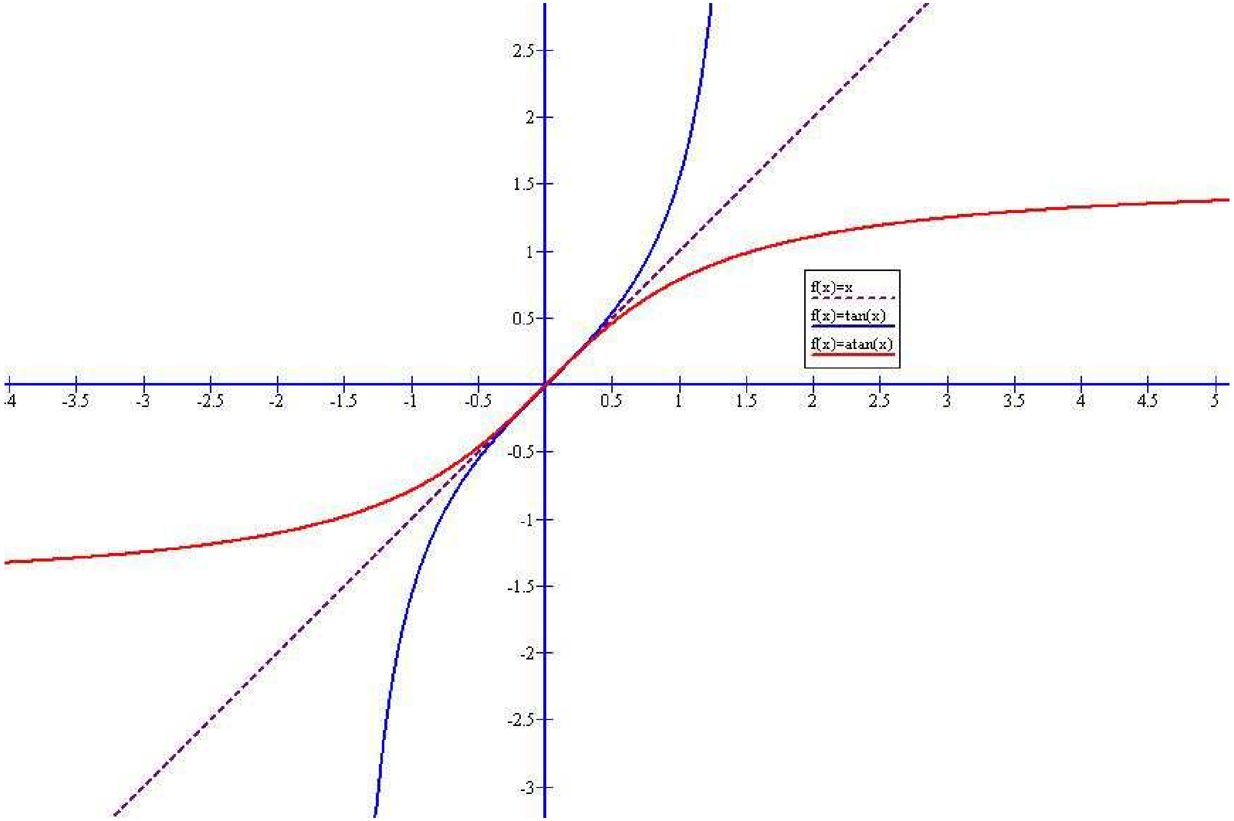
$$\arccos x : [-1;1] \rightarrow [0;\pi]$$



$y = \text{arctg}x$

La funzione tangente, anche se monotona in senso stretto, essendo periodica, non è invertibile,
pertanto si restringe il suo dominio effettuando un taglio

nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$



$$\arctan x : R \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

ALCUNE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE: DILATAZIONI

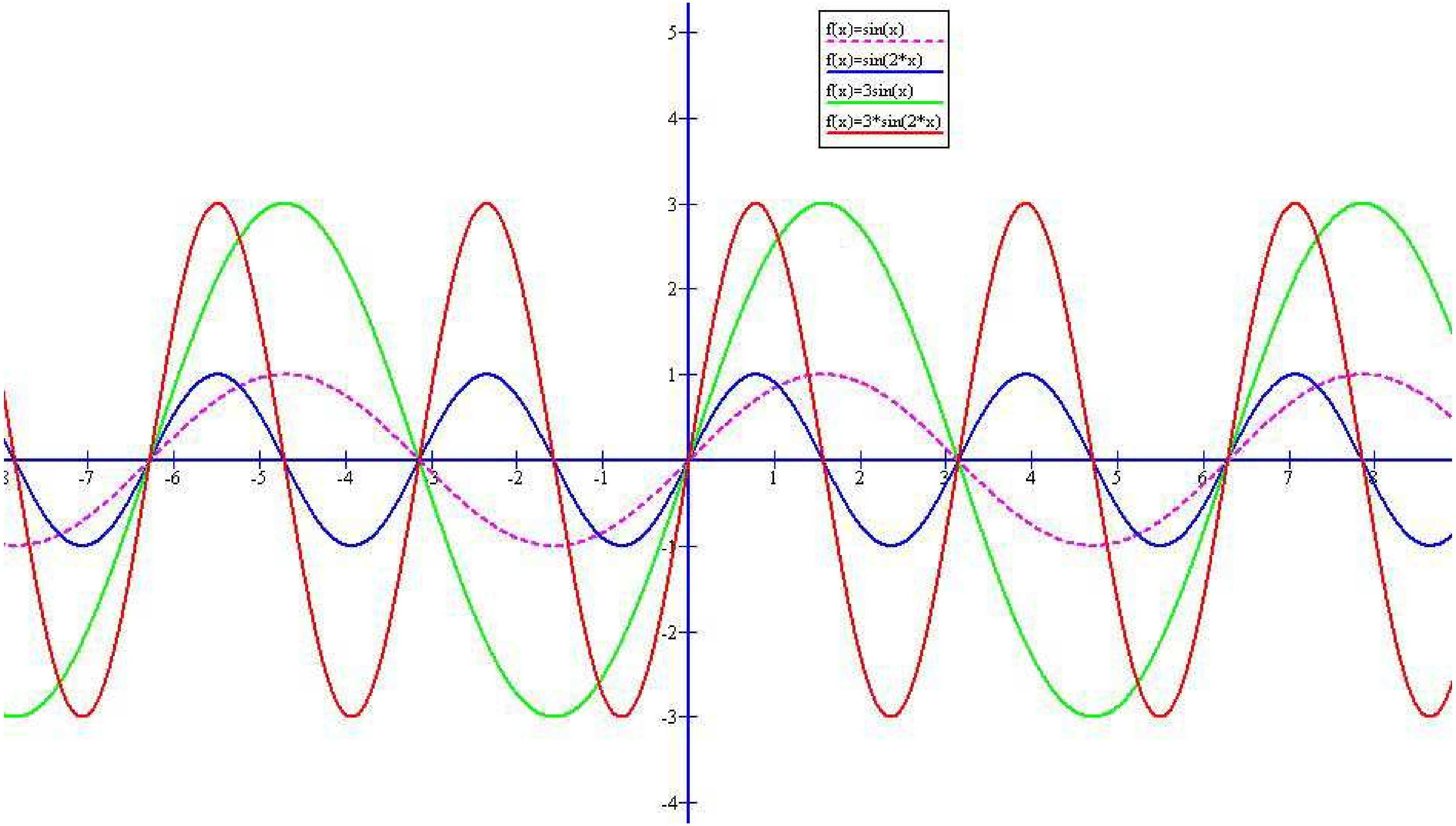
$$y = f(x) \qquad\qquad y' = f(x')$$

$$\begin{cases} x = hx' \\ y = ky' = kf(x') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{h} \\ y' = \dfrac{y}{k} \end{cases}$$

$$y = k \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) = k \cdot f(tx)$$ con

$$t = \frac{1}{h}$$

Se $k > 1$ dilatazione verticale
Se $k < 1$ contrazione verticale
Se $t > 1$ contrazione orizzontale
Se $t < 1$ dilatazione orizzontale



$y = \sin x$ (viola) $y = \sin(2x)$ (blu) $y = 3\sin x$ (verde) $y = 3\sin(2x)$ (rosso)

Periodo di funzioni con dilatazioni e contrazioni

OSS. Se la funzione y = f(x) è periodica di periodo T, allora la funzione y = f(γx) è periodica di periodo T' = T/γ

dim.

Bisogna verificare che

$$f(\gamma(x+T')) = f(\gamma x) \quad \text{ossia}$$

$$f\left(\gamma\left(x+\frac{T}{\gamma}\right)\right) = f(\gamma x + T) = f(\gamma x)$$

1) y = sin(2x) T = $\frac{2\pi}{2} = \pi$

2) $y = 3\sin x + 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ $\quad T_1 = 2\pi \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$$T = m.c.m.(T_1, T_2) = 8\pi$$

RICHIAMIAMO I DOMINI

- ✓ Funzioni razionali fratte $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ $D(x) \neq 0$
- ✓ Funzioni radice di indice pari $y = \sqrt{A(x)}$ $A(x) \geq 0$
- ✓ Funzioni logaritmiche $y = \log_a [A(x)]$ $A(x) > 0$
- ✓ Funzione tangente $y = tg(A(x))$ $A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ✓ Funzione arcoseno $y = \arcsin(A(x))$ $-1 \leq A(x) \leq 1$
- ✓ Funzione arcocoseno $y = \arccos(A(x))$ $-1 \leq A(x) \leq 1$

ESEMPI

- ✓ $y = \ln(\cos x) + \sqrt{2\text{senx} - 1}$
- ✓ $y = \ln(\text{arcsenx})$
- ✓ $y = \begin{cases} -\arcsin x & x \le 0 \\ \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) & x > 0 \end{cases}$
- ✓ $y = \sqrt{\dfrac{\text{tgx} - 1}{\text{senx}}}$
- ✓ $y = \ln(\text{senx} - \cos x)$
- ✓ $y = \ln(x - \sqrt{4 - x^2})$