OBIETTIVO DELLA RICERCA SCIENTIFICA → stabilire se esistono relazioni tra le quantità che si ritengono essenziali per la descrizione di un fenomeno.

MODELLO DEL FENOMENO NATURALE → è una costruzione ideale e semplificata rispetto alla realtà, ma che si basa su alcune caratteristiche fondamentali del modo in cui il fenomeno si realizza.

Tali quantità o caratteristiche essenziali di un fenomeno possono essere qualitative o quantitative e vengono dette variabili.

Trovare tali relazioni permette anche di poter effettuare previsioni sull'andamento del fenomeno e sul valore di alcune variabili, al variare delle altre.

Relazioni e funzioni

Siano A e B due insiemi
Si definisce <u>prodotto cartesiano</u> tra A e B (e lo si indica con il simbolo A x B) l'insieme formato da tutte le <u>coppie ordinate</u> (x,y) al variare di x in A e di y in B

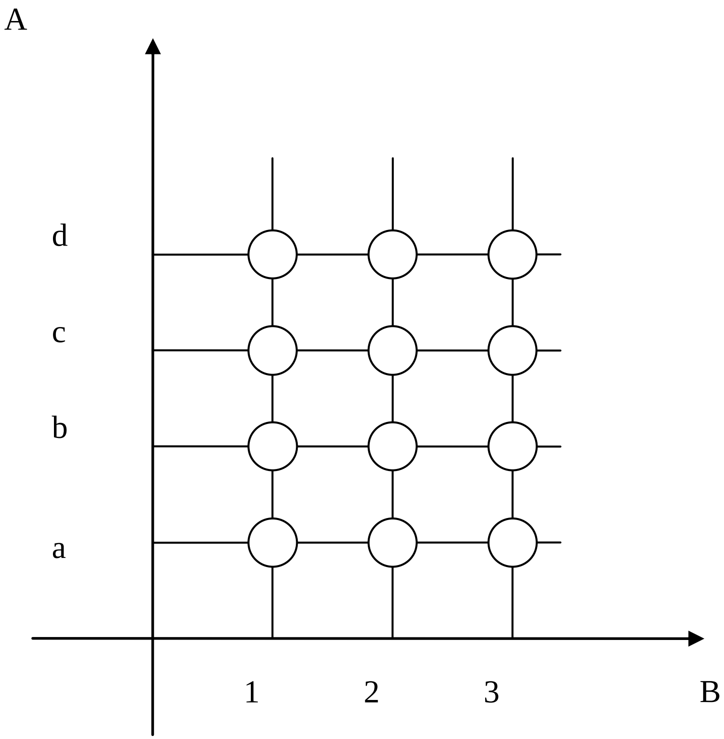
$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

<u>Esempio.</u> A = {a,b,c,d} B = {1,2,3}

A x B = { (a,1); (a,2); (a,3); (b,1); (b,2); (b,3); (c,1); (c,2); (c,3); (d,1); (d,2); (d,3)}

Rappresentazione del prodotto cartesiano

Mediante diagramma cartesiano



Mediante tabella a doppia entrata

A x B	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)
d	(d,1)	(d,2)	(d,3)

Una coppia <u>ordinata</u> è tale in quanto conta l'ordine in cui vengono indicati gli elementi.

Una coppia è (a,b) è <u>ordinata</u> $\Leftrightarrow$ $(a,b) \neq (b,a)$

Due coppie ordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono <u>uguali</u> $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

La più nota applicazione degli insiemi prodotto è il PIANO CARTESIANO.

Indichiamo con R l'insieme dei numeri reali. Per definizione, il piano cartesiano è l'insieme di tutte le coppie ordinate (x,y) con x e y numeri reali.

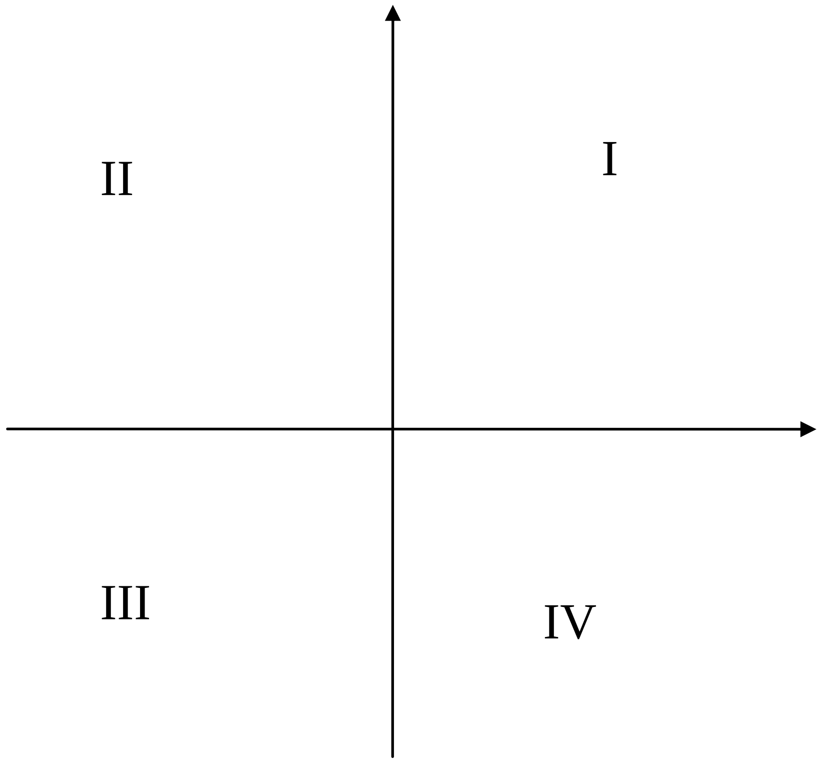
$$R \times R = \{(x,y) \mid x \in R \wedge y \in R\}$$

Il primo numero è detto ascissa e il secondo ordinata. Gli assi x e y rappresentano graficamente l'insieme dei numeri reali R.

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA: $P \in$ piano $\leftrightarrow (x,y) \in R \times R$

In sintesi: Il piano cartesiano è composto da tutti i punti del piano in corrispondenza biunivoca con tutte le coppie ordinate (x,y) al variare di x e y in R, ossia da tutti gli elementi dell'insieme prodotto R x R, dove R indica l'insieme dei numeri reali.

I quadrante = $\{(x,y): x > 0, y > 0\}$
II quadrante = $\{(x,y): x < 0, y > 0\}$
III quadrante = $\{(x,y): x < 0, y < 0\}$
IV quadrante = $\{(x,y): x > 0, y < 0\}$



INSIEME

INSIEME STRUTTURATO

- RELAZIONI
  - ORDINE
  - EQUIVALENZA
- OPERAZIONI
  - INTERNE
  - ESTERNE

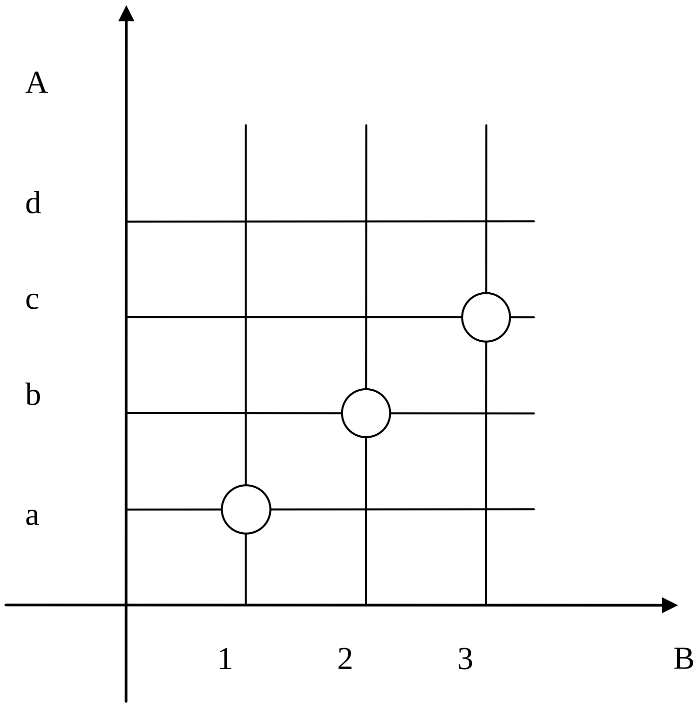
RELAZIONI

<u>DEF.</u> Si definisce <u>RELAZIONE</u> tra due insiemi A e B un qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano A x B

$$\Re \subset AxB$$

$$\Re = \{(a,1);(b,2);(c,3)\} \subset AxB$$

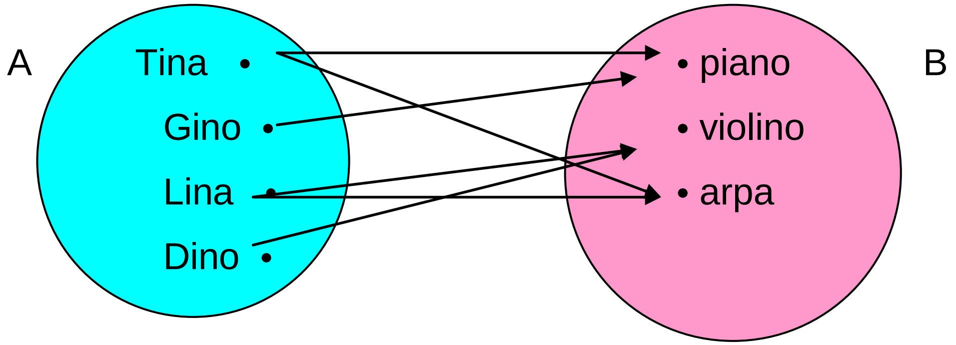
$$a \, \Re \, 1$$



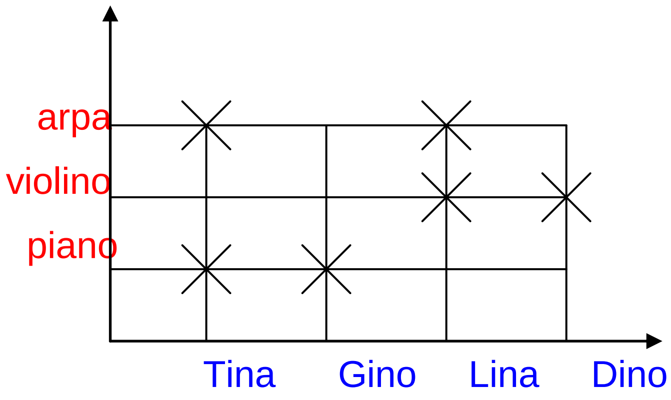
Esempio.
A={Tina, Gino, Lina, Dino} B={piano, violino, arpa}

La relazione che ci interessa rappresentare è: R=”...suona...”

Tale relazione mette in corrispondenza gli elementi dell’insieme A con quelli dell’insieme B. Visualizziamo questa relazione su un diagramma sagittale:



E’ dunque possibile rappresentare la relazione precedente mediante un diagramma cartesiano:



Oppure mediante una tabella a doppia entrata:

	Tina	Gino	Lina	Dino
Arpa	•		•	
Violino			•	•
piano	•	•		

Tina R arpa

Tina $\not R$ violino

Più in generale, considerati due insiemi H e K e stabilita una regola R che permetta di individuare un legame tra gli elementi x del primo insieme e quelli y del secondo, si ha che:

$$(x,y) \text{ sono in relazione } \Leftrightarrow x\,R\,y$$

$$(x,y) \text{ non sono in relazione } \Leftrightarrow x \not R\, y$$

Viene così a formarsi il sottoinsieme G del prodotto cartesiano H $\times$ K, costituito da quelle particolari coppie (x,y) di H $\times$ K che soddisfano la relazione espressa. Tale insieme viene definito ***grafico*** della relazione R, che pertanto sarà indicata con il simbolo

R = (H $\times$ K, G).

Secondo la simbologia dell'insiemistica, si può dunque pensare di sintetizzare tale concetto nel seguente modo:

$$x\,R\,y :\Leftrightarrow (x,y) \in G$$

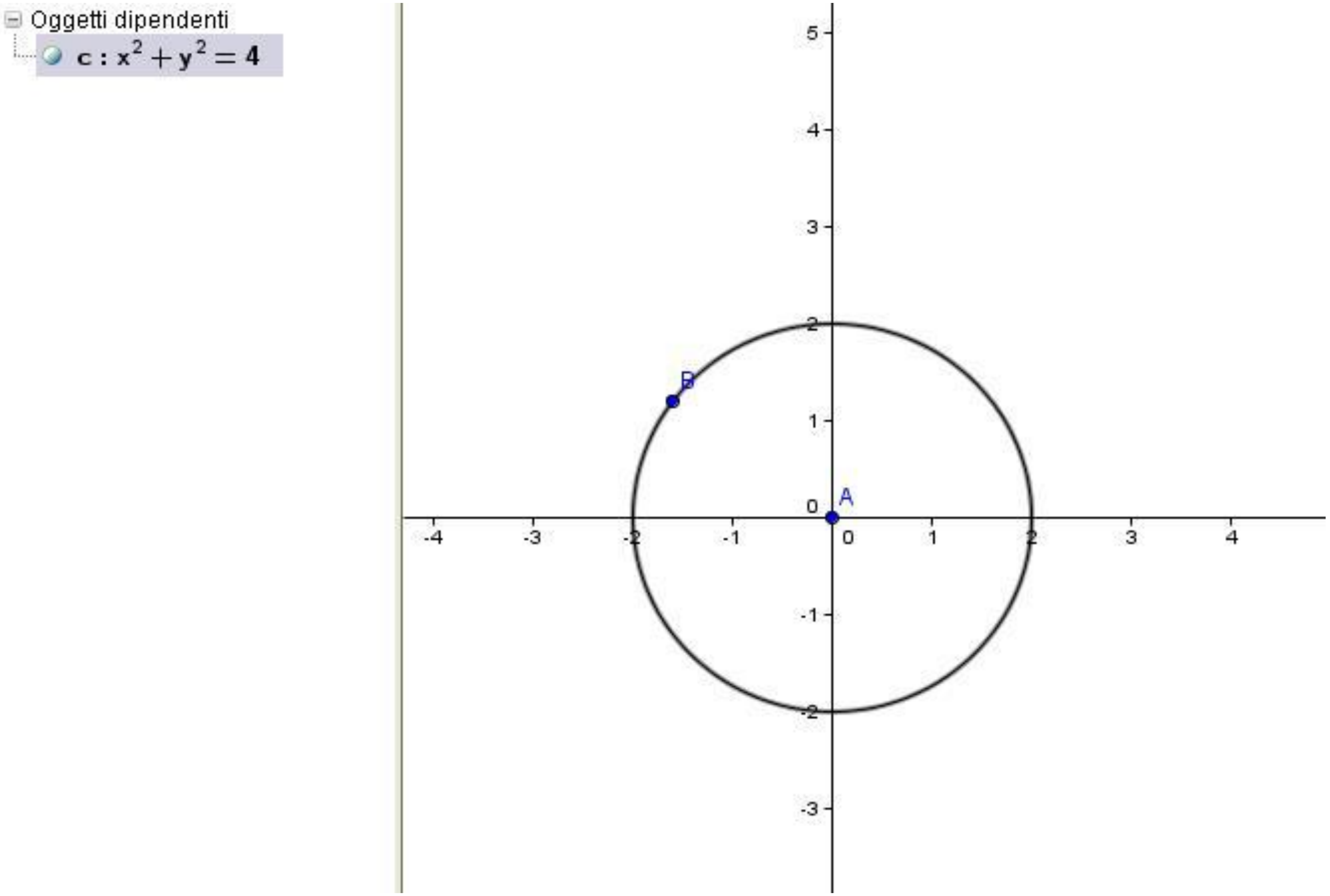
$$x \not R\, y :\Leftrightarrow (x,y) \notin G$$

Una relazione può essere determinata da una formula matematica

$$x^2 + y^2 = 4$$

Il cui grafico è:

$$G = \{(x,y) \in RxR \mid x^2 + y^2 = 4\}$$



rappresenta una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio 2.

Una ***relazione binaria*** *è una relazione tra elementi di uno stesso insieme S* e viene anch’essa rappresentata mediante un grafico G, contenuto nel prodotto cartesiano SxS.

$$\mathbf{R = (SXS,G) \text{ con } G \subseteq SXS}$$

Proprietà delle relazioni binarie:

- R ***riflessiva*** : $\Leftrightarrow xRx, \ \forall x \in S$
- R ***antiriflessiva*** : $\Leftrightarrow x \not R x, \ \forall x \in S$
- R ***simmetrica*** : $\Leftrightarrow (xRy \Rightarrow yRx)$
- R ***antisimmetrica*** : $\Leftrightarrow (xRy \Rightarrow y \not R x)$
- R ***asimmetrica*** : $\Leftrightarrow (xRy, yRx \Rightarrow x=y)$
- R ***transitiva*** $\Leftrightarrow (xRy, \ yRz \Rightarrow xRz)$

PAROLE
DELLA LINGUA ITALIANA

ORDINATE
secondo l’alfabeto
in un vocabolario

RIPARTITE IN
CLASSI DI VOCABOLI
secondo la loro funzione:
aggettivi, sostantivi, forme

Una relazione ***R è d'ordine stretto*** se e solo se:

- R è ***antiriflessiva***

$\Rightarrow$ R è ***antisimmetrica***

- R è ***transitiva***

R si indica con $<$

Una relazione d'ordine R è ***d'ordine totale*** $:\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ xRy o yRx, $\forall x,y \in S$

$\Leftrightarrow$ ***tutti gli elementi sono confrontabili tra loro***

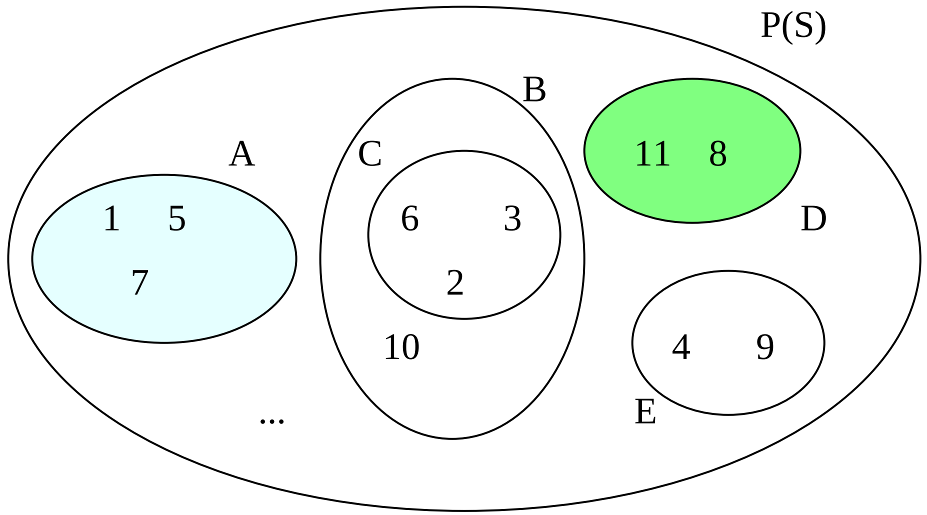
Naturalmente non tutte le relazioni d'ordine godono di tale proprietà, per cui si parla anche di ***relazioni d'ordine parziale***, ossia di relazioni tali che ***esistono almeno due elementi non confrontabili tra loro***.

R è una ***relazione d'ordine largo*** se e solo se:

- R è ***riflessiva***
- R è ***asimmetrica***
- R è ***transitiva***

R si indica con il simbolo $\leq$

Esempio. Si consideri ***l'insieme delle parti di un insieme S***. L'insieme delle parti è costituito da tutti i sottoinsiemi di S che possono essere ***ordinati per inclusione***.



Come si può notare l'insieme C è contenuto nell'insieme B e l'insieme B è contenuto nell'insieme P(S), per cui anche C è contenuto in P(S). Inoltre ogni insieme è contenuto in se stesso e se due insiemi sono contenuti l'uno nell'altro allora per definizione risultano uguali. In questo caso diremo di aver ordinato P(S) per inclusione e scriveremo in questo modo: $(P(S), \subseteq)$.

E' possibile considerare anche l'usuale relazione d'ordine tra numeri.

La retta reale è TOTALMENTE ORDINATA, in quanto accade che:

$$x < y \text{ o } x > y \text{ o } x = y\ , \forall x, y \in \mathbb{R}$$

R è una ***relazione di equivalenza*** se e solo se:

- R è ***riflessiva***
- R è ***simmetrica***
- R è ***transitiva***

Ogni relazione di equivalenza “induce” sull’insieme in cui è definita una partizione “canonica” i cui elementi (sottoinsiemi di A a due a due disgiunti, la cui unione dà ancora A) sono le **classi di equivalenza** della partizione. L’insieme delle classi di equivalenze è detto **Insieme Quoziente**.

Esempio. Si pensi al concetto di parallelismo tra rette su un piano.
R = “ essere parallela a …” = //
Tale relazione, nell’insieme delle infinite rette del piano, è una RELAZIONE D’EQUIVALENZA, infatti:

- r // r (ogni retta è parallela a se stessa, proprietà RIFLESSIVA)
- se r // s $\Rightarrow$ s // r (proprietà SIMMETRICA)
- se r // s e s // t $\Rightarrow$ r // t (proprietà TRANSITIVA)

L’insieme di tutte le rette parallele tra loro costituisce una classe di equivalenza detta DIREZIONE

$$[r]_{//} = \{s \in \pi \mid s // r\}$$

Tutte le classi di equivalenza nate in tal modo sono non vuote e a due a due disgiunte, in quanto se una retta appartiene ad una data classe, ossia è parallela ad una data retta e ha quindi una data direzione, non potrà essere parallela ad una retta con diversa direzione. Inoltre l'unione di tali classi restituisce tutte le infinite rette del piano.

Una tale relazione determina dunque una ***ripartizione in classi***

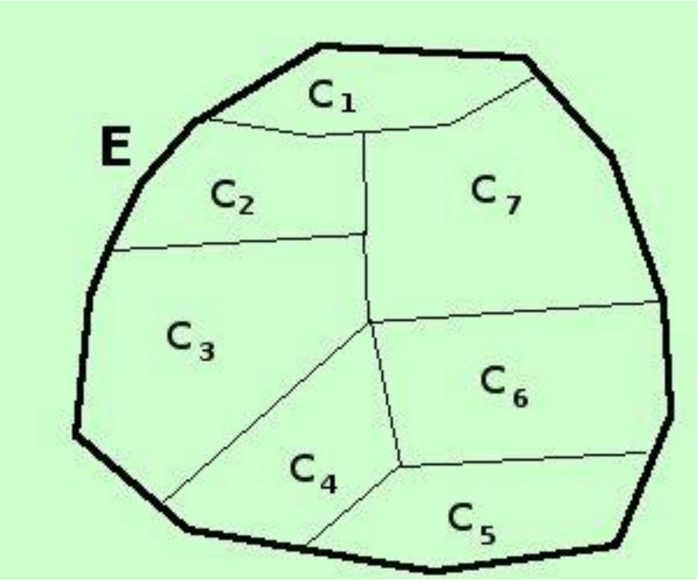
Def. Si chiama **Partizione** di un insieme A una collezione di sottoinsiemi non vuoti di A tali che:

- sono a due a due disgiunti
- la loro unione è uguale all'insieme A

A = {1,2,3,4,5,6}

Una possibile partizione di A

$C_1 = \{1\}$; $C_2 = \{4,5\}$ $C_3 = \{2,3,6\}$



L'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza è detto insieme quoziente. Esso è di fondamentale importanza in matematica, in quanto permette di *considerare tutti gli elementi di una classe mediante un unico concetto*.

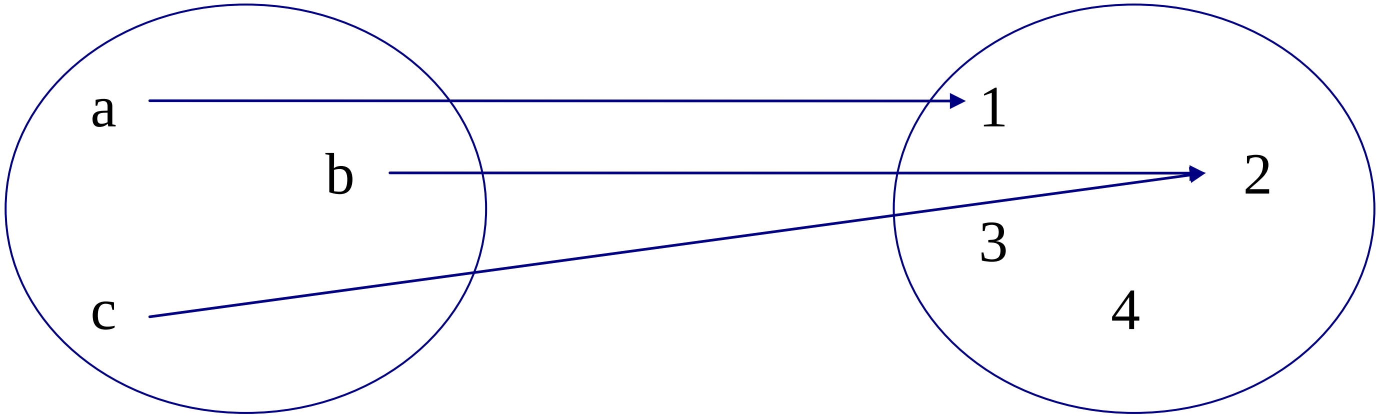
Esempio. Classi Resto in aritmetica finita.

FUNZIONE

DEF. Siano A e B insiemi. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è una relazione tra A e B che **ad ogni** elemento di A associa **uno e un solo** elemento di B.

In simboli matematici:

$f : A \rightarrow B$ è una funzione di A in B $\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \; \exists! y \in B \mid y = f(x)$



x = VARIABILE INDIPENDENTE
y = VARIABILE DIPENDENTE

DEF. Si definisce DOMINIO della funzione l'insieme dei valori *assunti dalla variabile x*

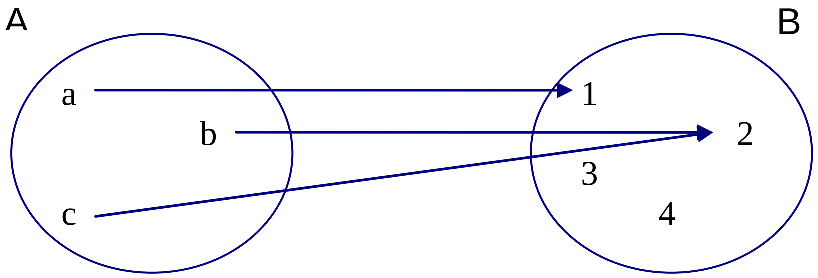
DEF. Si definisce CODOMINIO della funzione l'insieme dei valori *assunti dalla funzione*, ossia l'insieme delle y di B che vengono associati a ciascun x di A. Gli elementi y associati a ciascun elemento x di A vengono dette immagini di x.

Il CODOMINIO è detto anche INSIEME DELLE IMMAGINI di una funzione.

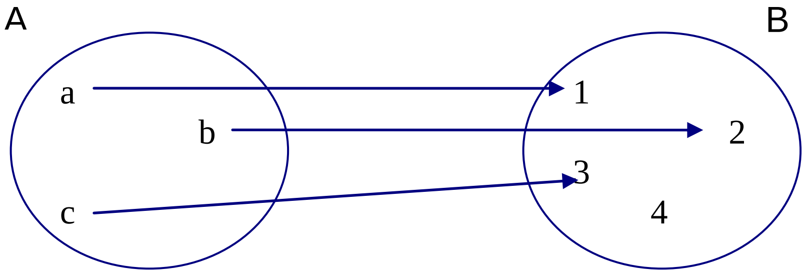
$$C = f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : y = f(x)\}$$

GRAFICO della funzione f: $G = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$

[DEF.]() Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta INIETTIVA se e solo se ogni elemento di B è immagine di **al più** un elemento di A



Non iniettiva



Iniettiva

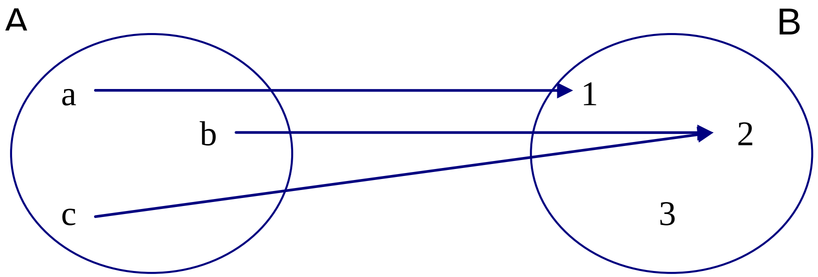
In simboli:

$f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva

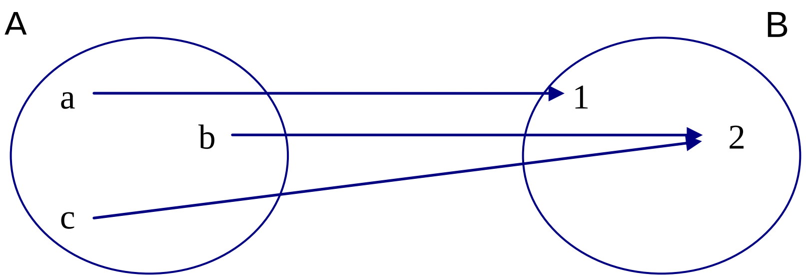
$$\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

<u>DEF.</u> Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta SURIETTIVA se e solo se ogni elemento di B è immagine di **<u>almeno</u>** un elemento di A



Non suriettiva

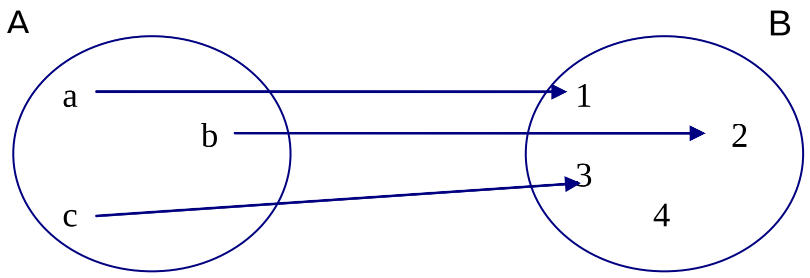


Suriettiva $f(A) = B$

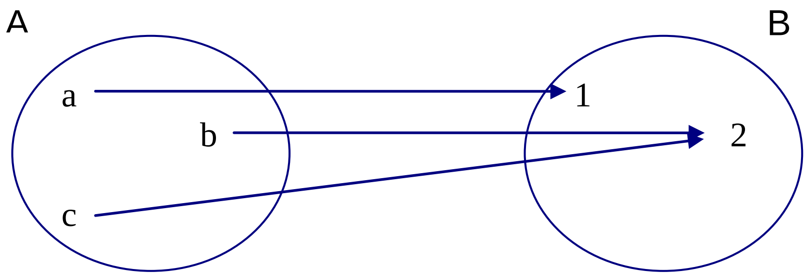
In simboli:

$f : A \rightarrow B$ è una funzione suriettiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B \; \exists x \in A \mid y = f(x)$

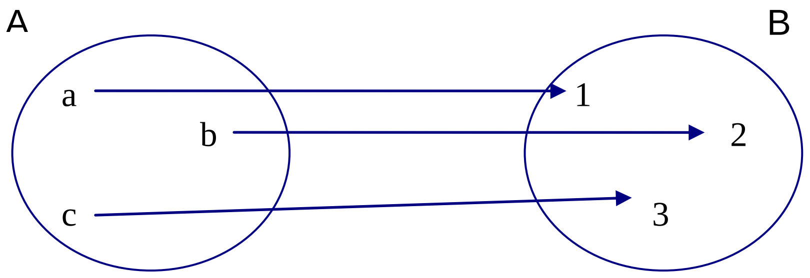
<u>DEF.</u> Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta BIETTIVA o BIUNIVOCA se e solo se è sia <u>iniettiva</u> che <u>suriettiva</u>



Iniettiva ma non suriettiva



Suriettiva ma non iniettiva



Biettiva o biunivoca

Se A e B sono entrambi sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali, allora si parlerà di <u>funzione reale di variabile reale</u>.

$f : A \subseteq R \rightarrow B \subseteq R$ è una funzione reale di variabile reale di A in B $\Leftrightarrow \quad \forall x \in A\ \exists! y \in B \mid y = f(x)$

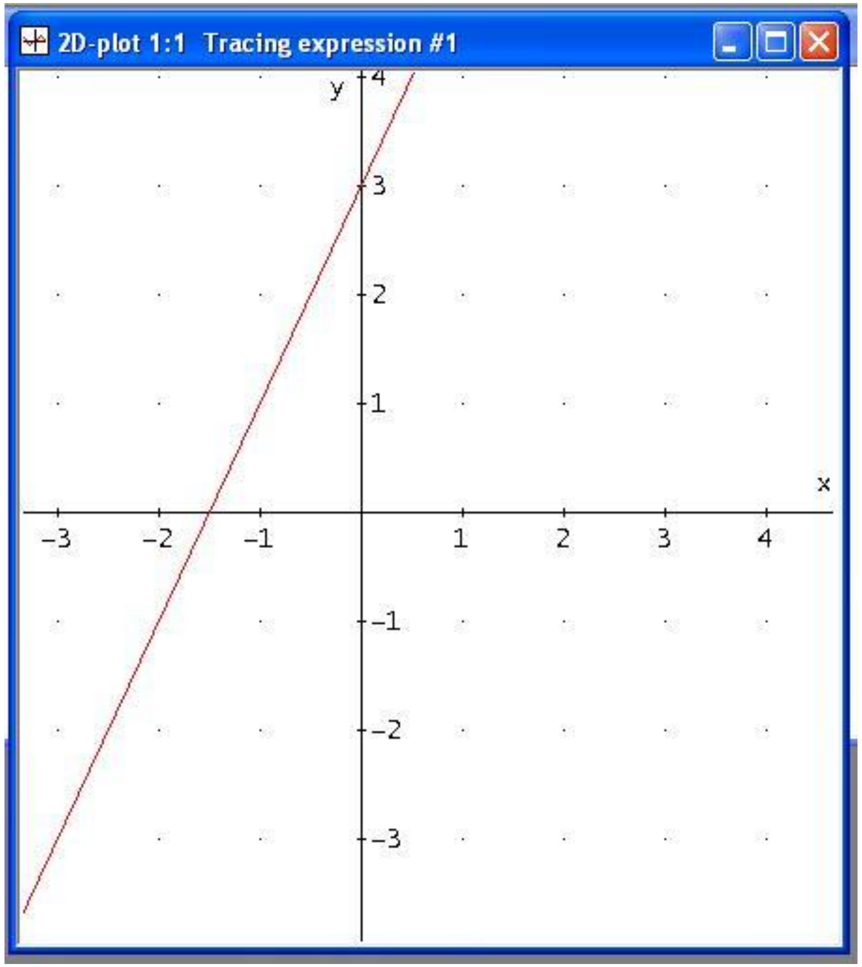
Il grafico di una funzione reale di variabile reale è l'insieme delle coppie ordinate (x,f(x)) rappresentate da punti del piano cartesiano.

Tali punti possono essere infiniti, pertanto il grafico della funzione sarà rappresentato da una <u>curva sul piano cartesiano</u>. Tutti i punti di tale curva soddisfano la funzione considerata, ossia sono coppie (x,f(x)) del grafico di f.

Esempio.

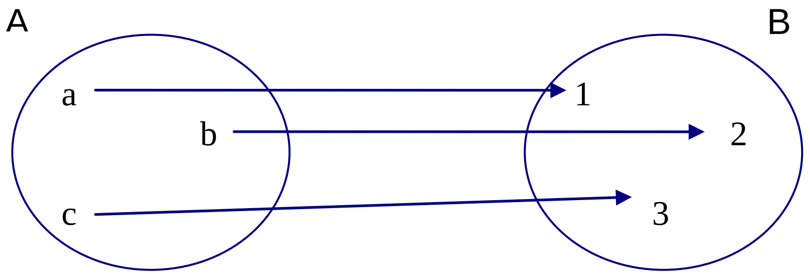
Sia $f : x \in R \longmapsto 2x + 3 \in R$

Essa può essere anche più semplicemente espressa mediante l'equazione $y = 2x + 3$ il cui grafico nel piano cartesiano è una retta.



Tale funzione è detta funzione LINEARE

Due insiemi A e B hanno la stessa <u>cardinalità</u> se e solo se esiste una funzione biettiva di A in B.



Biettiva o biunivoca

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B \text{ biettiva}$$

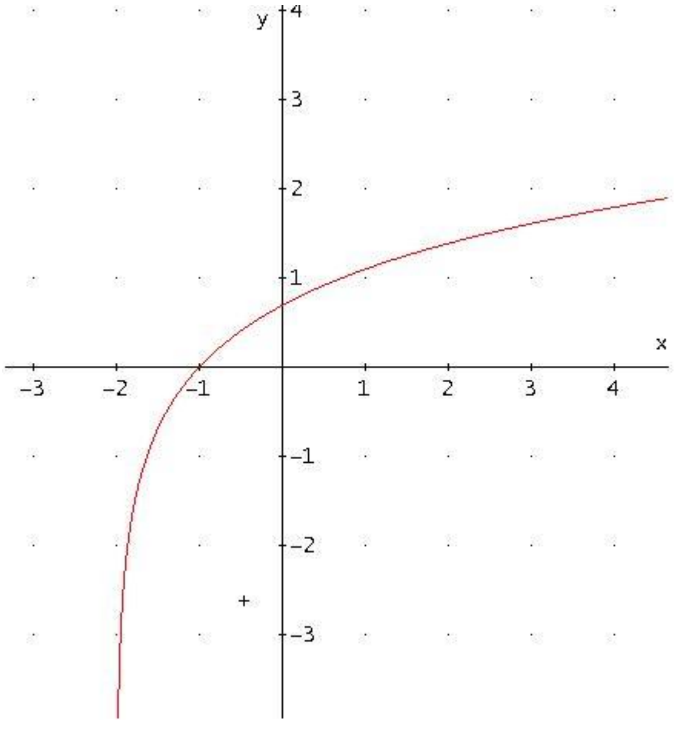
Nel caso di insiemi finiti, la cardinalità di un insieme indica il numero dei suoi elementi, mentre per insiemi infiniti può accadere che insiemi siano equipotenti ad un loro sottoinsieme proprio, ossia che abbiano la stessa cardinalità di un sottoinsieme strettamente contenuto in esso.

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

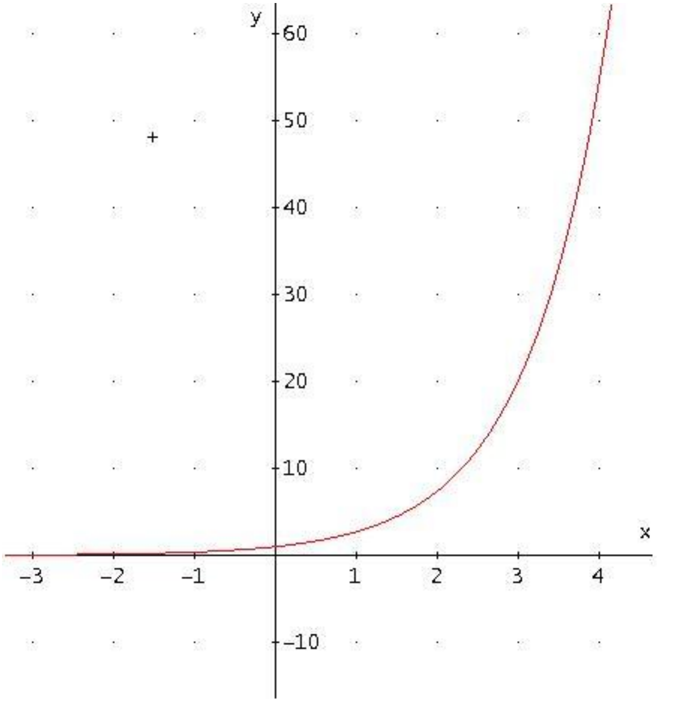
Sia $f : x \in D \subseteq R \mapsto f(x) \in C \subseteq R$

La funzione si dice <u>crescente in senso stretto</u> $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$y = \log(x+2)$

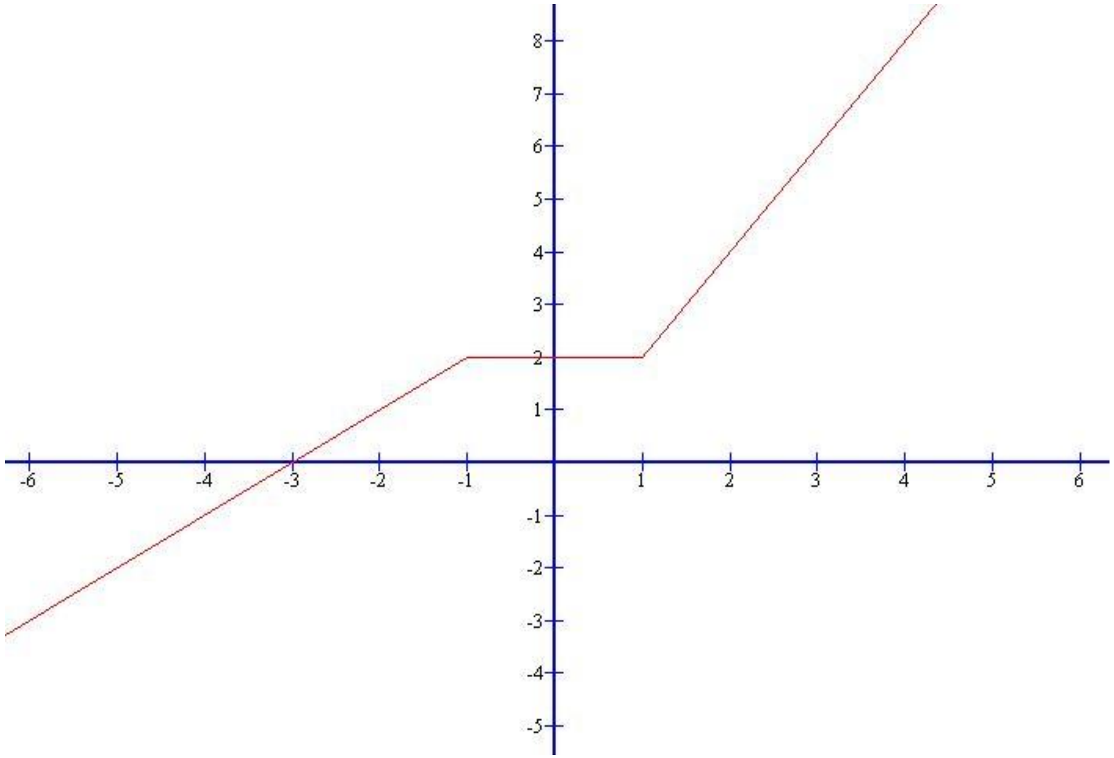


$y = e^x$



La funzione si dice <u>crescente in senso lato</u> o <u>non decrescente</u> $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

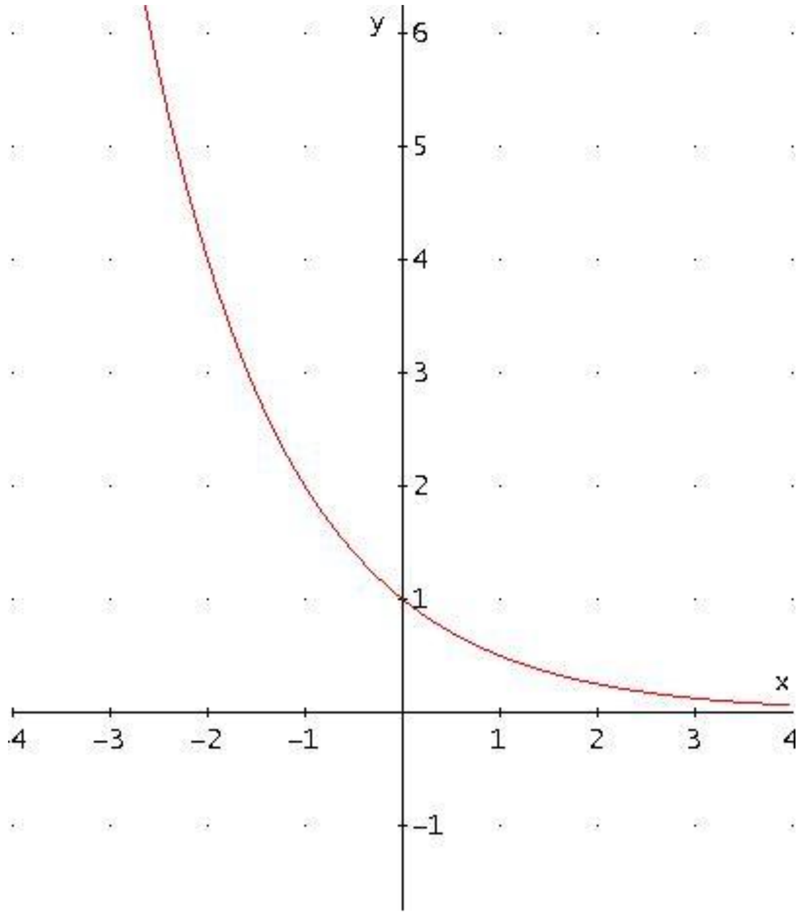
$$y = f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ x+3 & x < -1 \end{cases}$$



La funzione si dice <u>decrescente in senso stretto</u> $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2$

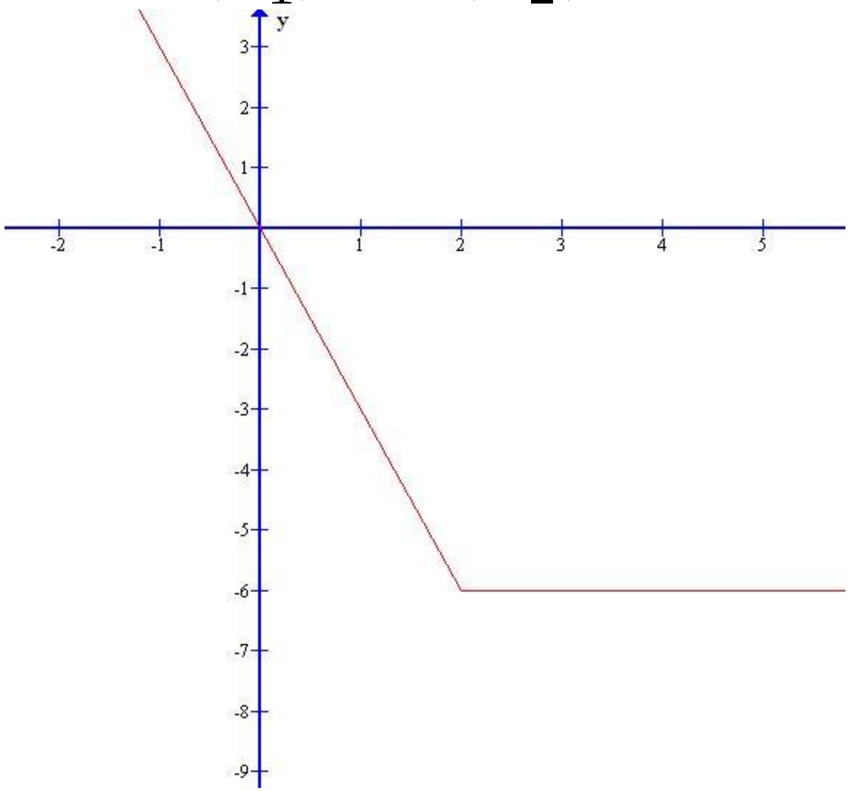
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



La funzione si dice <u>decrescente in senso lato</u> o <u>non crescente</u> $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$$y = \begin{cases} -3x & x \leq 2 \\ -6 & x > 2 \end{cases}$$



Le funzioni non decrescenti o non crescenti si dicono <u>monotòne</u>.
In particolare le funzioni decrescenti in senso stretto o crescenti in senso stretto si dicono <u>monotòne in senso stretto</u>.

Sia $f : x \in D \subseteq R \mapsto f(x) \in C \subseteq R$

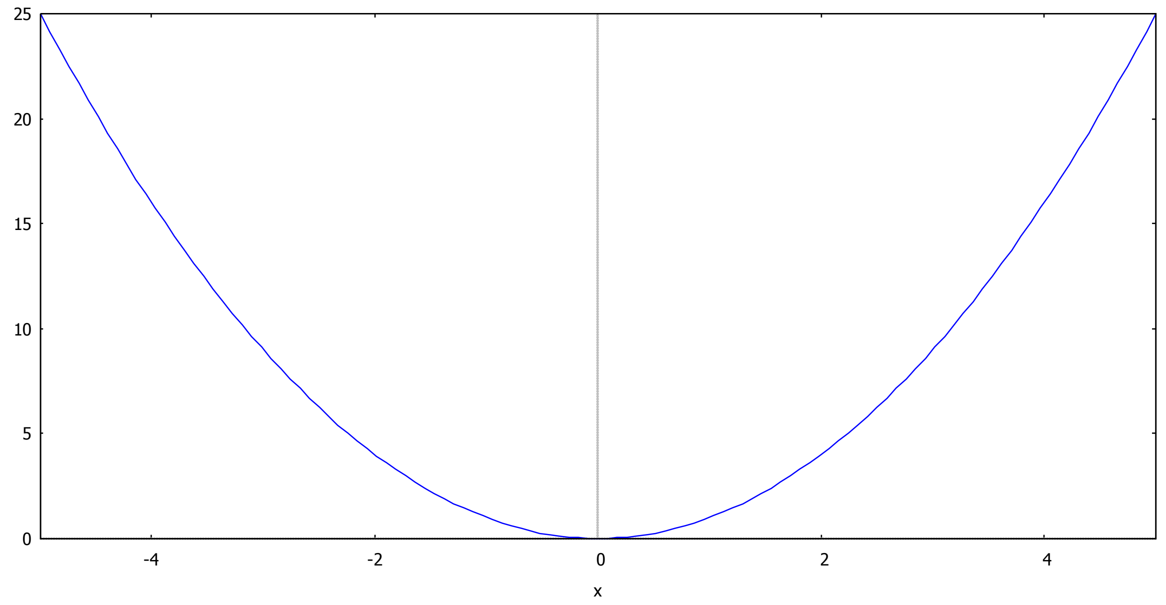
La funzione si definisce PARI $\Leftrightarrow$

$$1) \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$2) f(-x) = f(x)$$

$y = x^2$
parabola con vertice nell'origine degli assi

grafico simmetrico rispetto all'asse y



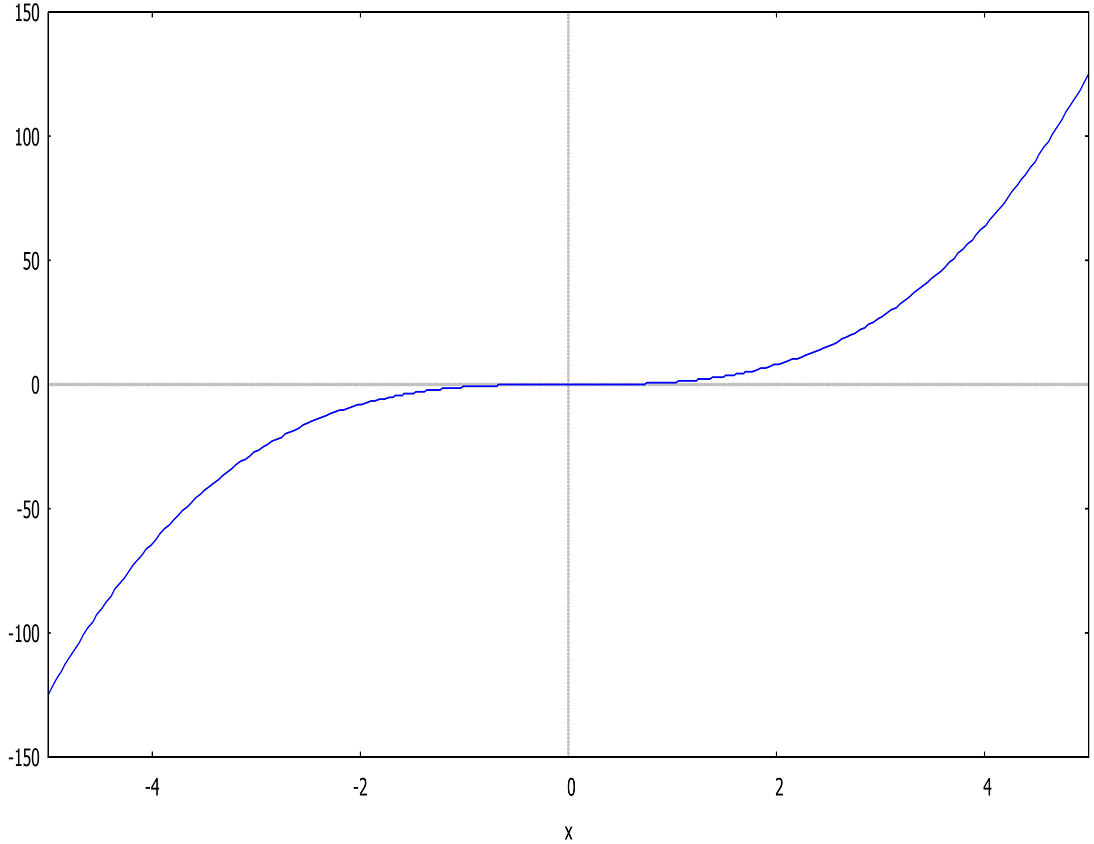
La funzione si definisce DISPARI $\Leftrightarrow$

$$1) \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$2) f(-x) = -f(x)$$

$y = x^3$
funzione cubica

grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi



Esempio: $y = x^3 - x$

Sia $f : x \in D \subseteq R \mapsto f(x) \in C \subseteq R$

La funzione si definisce PERIODICA $\Leftrightarrow$ $\exists T > 0 \mid$

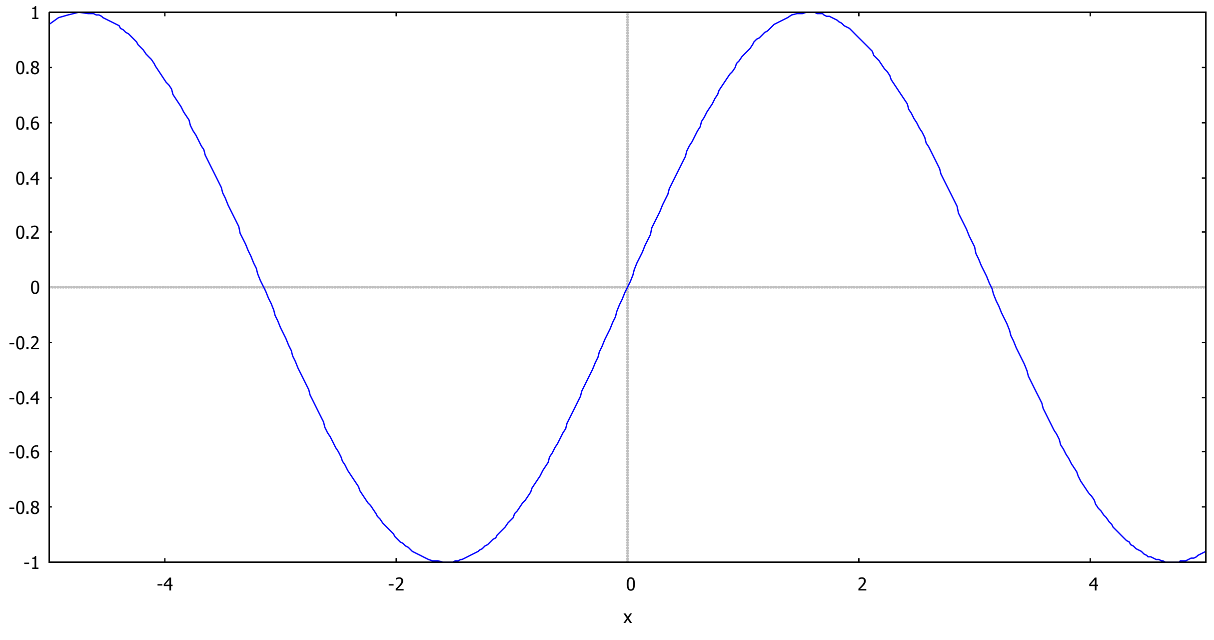
$$1) \forall x \in D \Rightarrow x + T \in D$$

$$2) f(x+T) = f(x)$$

Il più piccolo dei numeri T per cui vale tale proprietà è detto PERIODO della funzione f.

$y = \text{sen}x$

periodica di periodo $T = 2\pi$



Date le funzioni $f : x \in D_f \subseteq R \mapsto f(x) \in C \subseteq R$

$g: x \in D_g \subseteq R \mapsto g(x) \in C \subseteq R$

La funzione g è detta una <u>RESTRIZIONE</u> della funzione f o f è detta <u>PROLUNGAMENTO</u> della funzione g $\Leftrightarrow$

$$1)\, D_g \subset D_f$$

$$2)\, \forall x \in D_g \quad g(x) = f(x)$$

Esempio. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

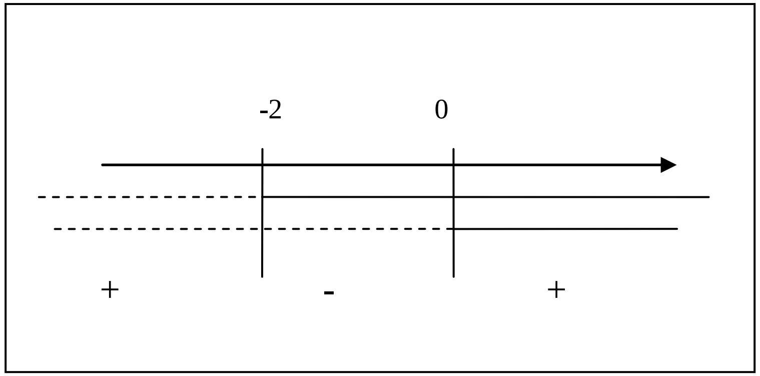
<u>OSS.</u> Due funzioni sono UGUALI se e solo se

1) Hanno stesso DOMINIO
2) Hanno stesso CODOMINIO
3) Hanno lo stesso GRAFICO

D_f: $\dfrac{x+2}{x} \geq 0$

$N: x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

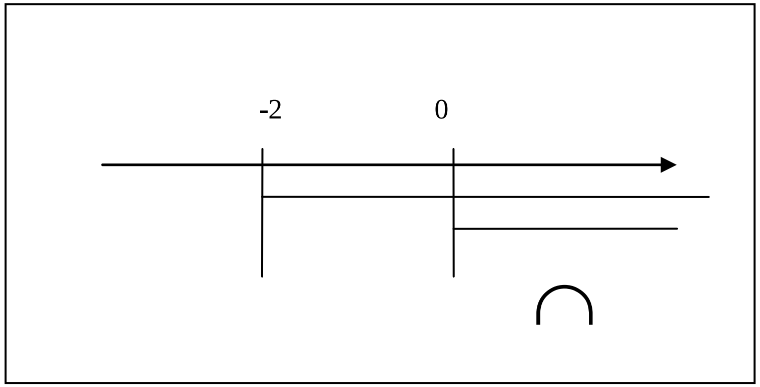
$D: x > 0$



$x \leq -2 \vee x > 0$

$D_f = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]0, +\infty\right[$

D_g: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$



$D_g = \left]0, +\infty\right[$

Le due funzioni coincidono solo per x > 0, in quanto nell’altro intervallo la funzione g non è definita: g è una restrizione della f.

Sia $f : x \in D_f \subseteq R \mapsto f(x) \in C \subseteq R$

Si definisce CONTROIMMAGINE dell'elemento y mediante f l'insieme di tutti gli elementi x del dominio tale che y è immagine della x.

$$f^{-1}(y) = \{x \in D \mid y = f(x)\}$$

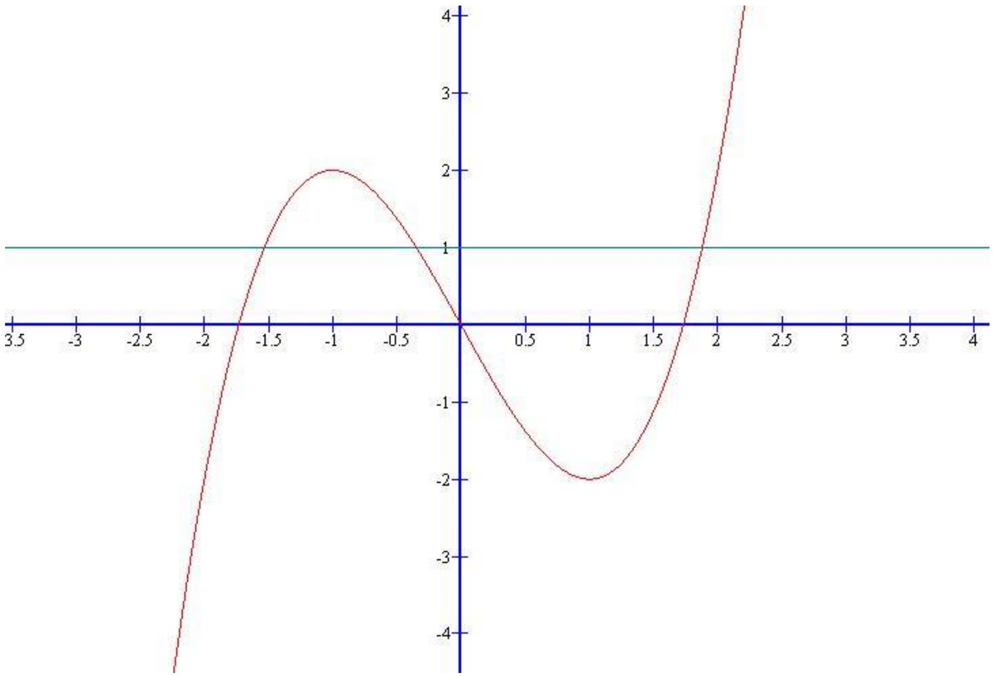
Si definisce CONTROIMMAGINE di C

$$f^{-1}(C) = \{x \in D \mid f(x) \in C\}$$

Nota: non si confonda la notazione $f^{-1}(y)$ con $1/f(y)$ (reciproco o inverso)

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $f(x) = y_0$, con y_0 dato e x incognita, abbia soluzioni è che y_0 appartenga al codominio.

In questo caso l’equazione $f(x)=y_0$ ha tre soluzioni, in quanto la retta $y = y_0$ interseca tre volte la curva.



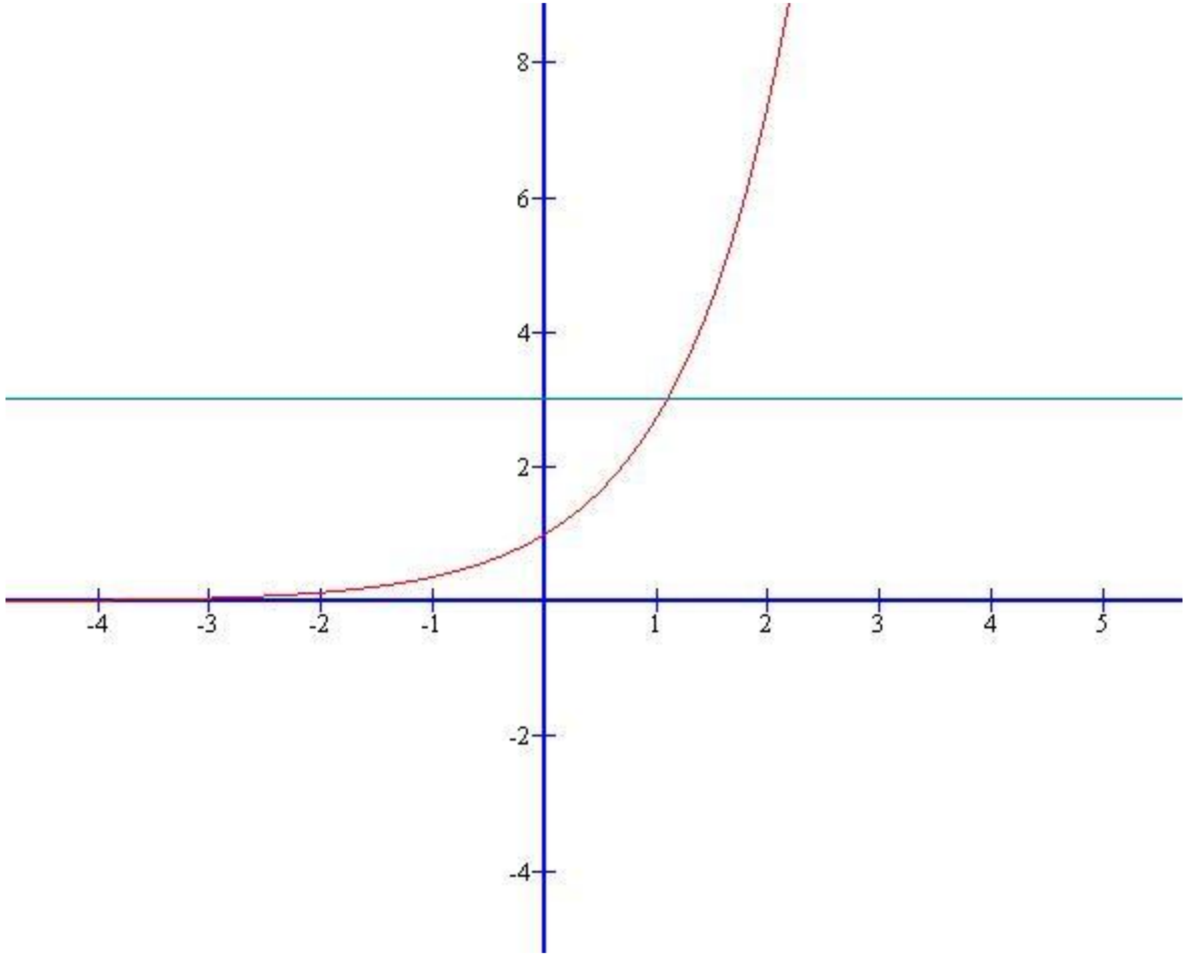
Tale funzione non è iniettiva, poiché a valori distinti della x corrisponde lo stesso valore della funzione.

f è INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ f è biettiva

Ossia, una funzione è invertibile se e solo se l’equazione $f(x) = y_0$ ammette una e una sola soluzione, ovvero se e solo se $\forall y \in C \ \exists! x \in D \mid y = f(x)$

Una classe importante di funzioni invertibili è data dalle funzioni monotone in senso stretto.

In questo caso ogni retta parallela all'asse x intersecherà la curva in un solo punto.
Quindi:
$\forall y \in C \;\; \exists! x \in D \mid y = f(x)$



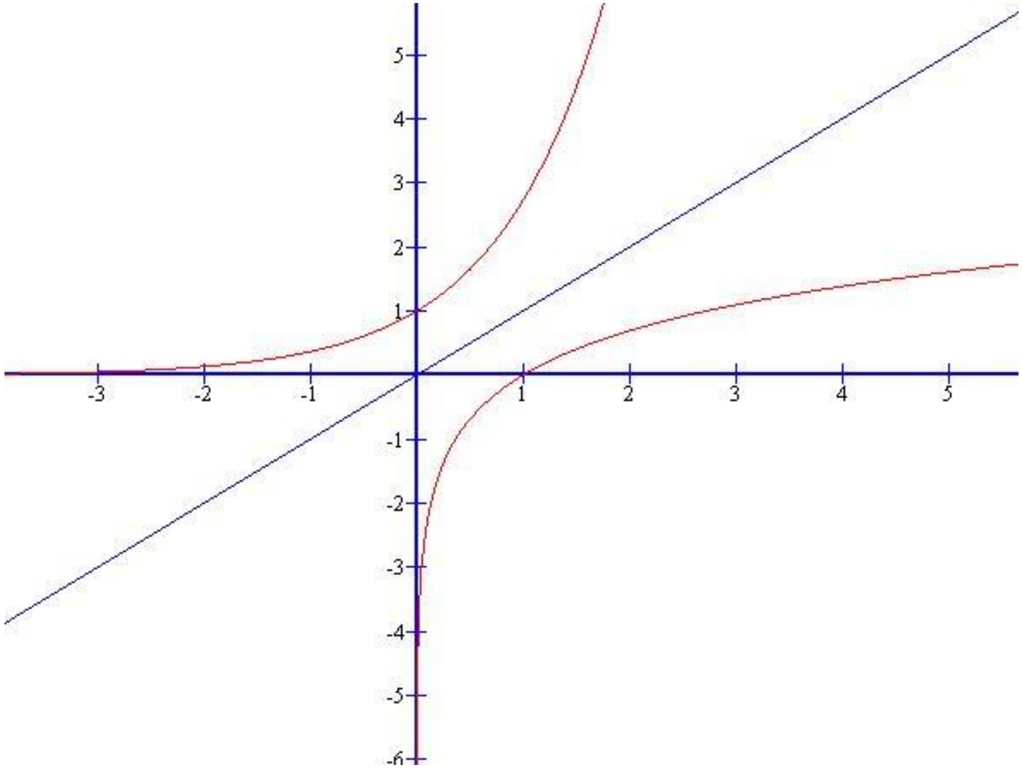
Se la funzione è invertibile $\Rightarrow$ è possibile definire la funzione inversa

$$f^{-1}: y \in C \mapsto x = f^{-1}(y) \in D \mid y = f(x)$$

D' = C C' = D

Una funzione e la sua inversa hanno il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

$y = e^x$ $y = \ln x$



Funzioni composte

Si consideri la funzione $y=\sqrt{3x+2}$. Essa nasce dalla composizione di due funzioni

$$x \mapsto 3x+2 \mapsto \sqrt{3x+2}$$

Naturalmente tale esempio evidenzia alcuni limiti evidenti: per poter comporre le due funzioni è necessario che il valore assunto dalla prima funzione sia un numero sul quale risulti calcolabile il valore assunto dalla seconda funzione.
Se alla x si associasse il valore -6, si avrebbe 3(-6)+2 = -16, ma non esiste la radice quadrata di -16.

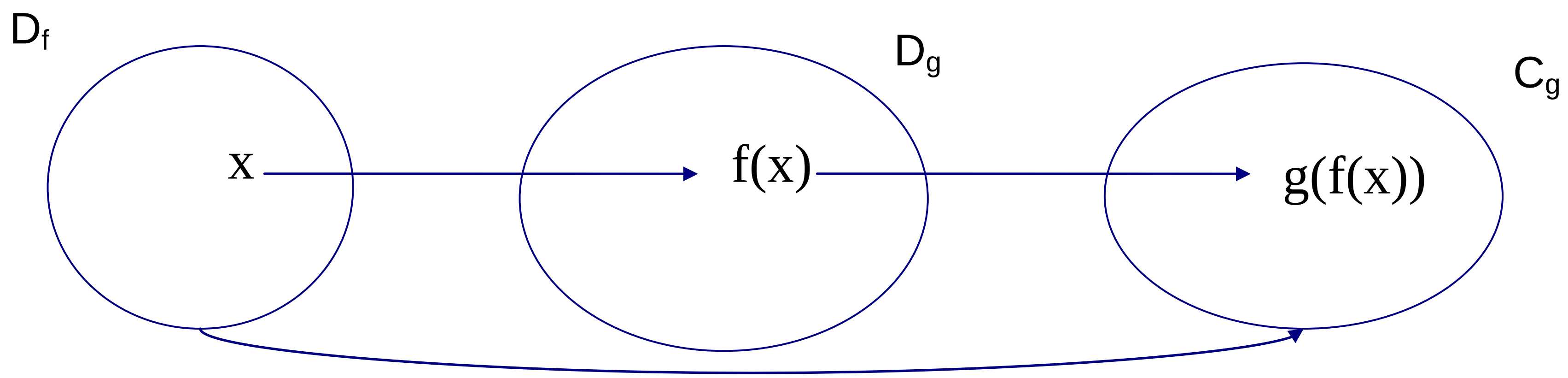
In generale, due funzioni

$$f : D_f \to C_f \qquad\qquad g : D_g \to C_g$$

sono componibili se il codominio della prima è contenuto nel dominio della seconda, ossia se $C_f \subseteq D_g$

Si definisce in tal caso una nuova funzione

$$h = g \circ f : x \in D_f \mapsto g(f(x)) \in C_g$$



OSS. Nel caso in cui si volessero comporre due funzioni f e g per cui non si verifica che $C_f \subseteq D_g$, allora bisognerà scegliere un sottoinsieme $D'_f \subseteq D_f$ in modo da determinare, mediante la funzione f, per ogni $x \in D'_f$, valori di f(x) $\in D_g$ nei quali sia possibile calcolare la seconda funzione g.

Esempio. $h : x \mapsto \log(2 - \sqrt{x+2})$

h è una funzione composta mediante le funzioni:

$f : x \mapsto 2 - \sqrt{x+2}$ $\qquad$ $g : t \mapsto \log t$

$$D_h : \begin{cases} 2 - \sqrt{x+2} > 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

OSS. La composizione di funzioni non è commutativa

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Esempio.

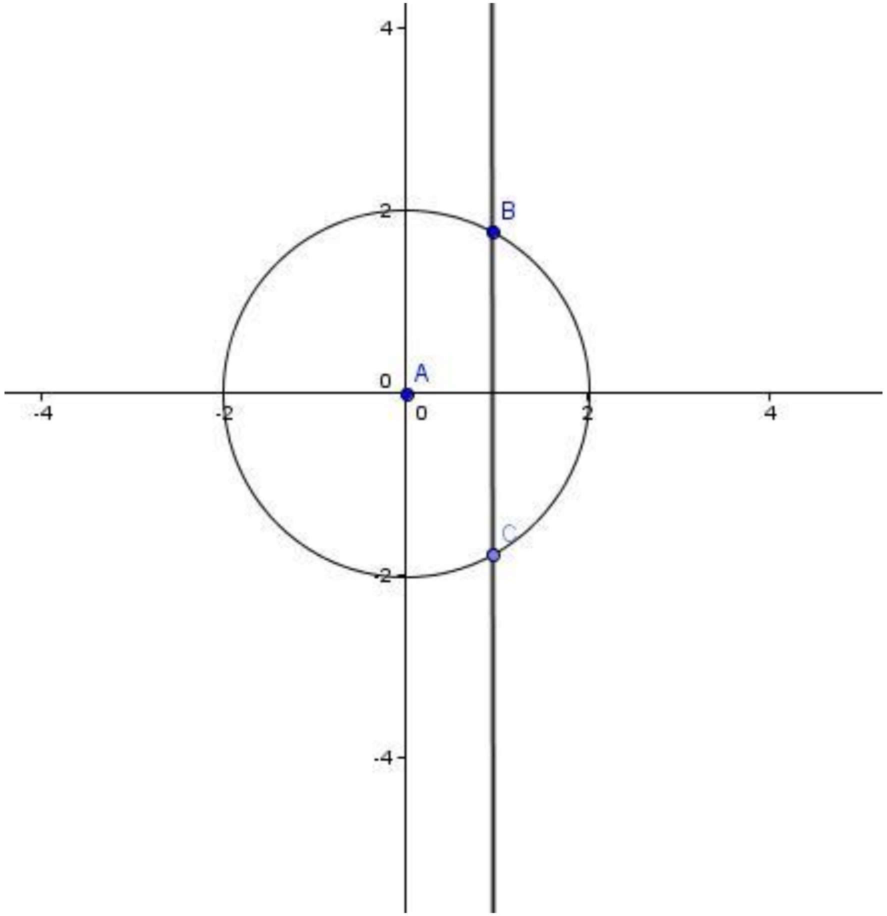
$f : x \mapsto 2x + 1$ $\qquad$ $g : x \mapsto x^2$

$g \circ f : x \mapsto 2x + 1 \mapsto (2x+1)^2$ $\qquad$ $f \circ g : x \mapsto x^2 \mapsto 2x^2 + 1$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

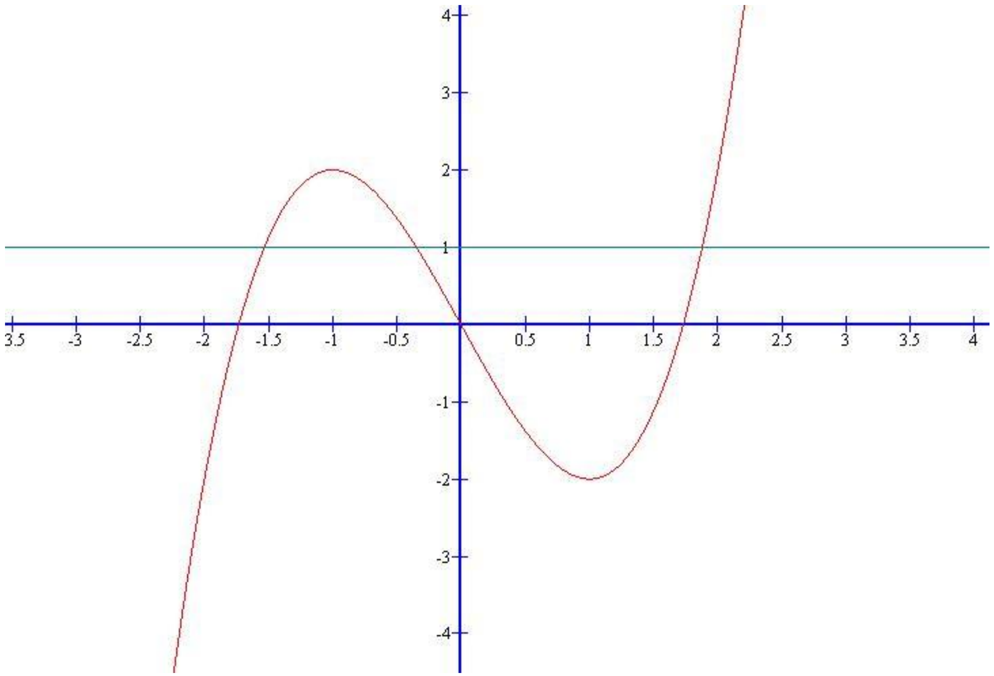
Il grafico della circonferenza
di equazione $x^2 + y^2 = 4$
non è una funzione, in quanto ad ogni elemento x del dominio corrispondono due immagini.

Se si traccia una retta parallela all'asse y, si individuano due intersezioni di tale retta con il grafico della curva.



Il grafico di una funzione interseca una retta x=h in al più un punto

<u>Non è iniettiva</u> in quanto se si traccia una retta parallela all’asse x, si individuano due intersezioni con il grafico della curva



<u>Una funzione iniettiva interseca una retta y=k in al più un punto</u>

Le slides sono reperibili all’indirizzo web:

http://digilander.libero.it/angeladonatiello/uninsubria.html

oppure nella pagina di e – learning del corso

Il programma GRAPH con cui sono stati realizzati i grafici è scaricabile all’indirizzo:

www.padowan.dk