INSIEMI

DEF. Un INSIEME è una qualsiasi “collezione” di oggetti.

Esso è ben definito quando è chiaro se un oggetto appartiene o non appartiene all’insieme stesso.

Esempio. E’ possibile definire l’insieme delle piante che producono O_2, in quanto esse contengono clorofilla, mentre non è possibile definire con certezza l’insieme delle piante dalle foglie larghe, in quanto ciò è soggetto ad ambiguità.

Gli oggetti di un insieme verranno detti ELEMENTI

Un insieme può contenere un numero FINITO o INFINITO di ELEMENTI

SIMBOLOGIA

Indichiamo gli insiemi mediante lettere maiuscole A, B, C, mentre i loro elementi mediante lettere minuscole a, b, c.

Simboli di appartenenza e non appartenenza: $a \in A$ $a \notin A$

Insieme vuoto Ø

$\forall$ per ogni quantificatore universale

$\exists$ esiste quantificatore esistenziale

! uno ed uno solo

$\Rightarrow$ implica $P \Rightarrow Q$ (se P è vera allora anche Q è vera)

$\Leftrightarrow$ se e solo se (doppia implicazione)

$\subseteq$ contenuto $\subset$ contenuto in senso stretto

Rappresentazione di un insieme:

- Per elencazione
- Diagrammi di Eulero-Venn
- Mediante Proprietà Caratteristica

Esempio. *L'insieme dei numeri naturali pari minori di 12*

$A = \{2,4,6,8,10\}$ per elencazione

$A = \{x \mid x = 2n, n \in N , x < 12\}$ mediante proprietà caratteristica

$$2 \in A \qquad\qquad 3 \notin A$$

SOTTOINSIEMI: A è un sottoinsieme di B se e solo se ogni elemento di A appartiene anche a B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Proprietà transitiva dell'inclusione: $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

UGUAGLIANZA: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ (doppia inclusione)

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $A \neq B$ (A sottoinsieme <u>proprio</u> di B)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \not\subseteq A$

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ e $\exists\, x \mid x \in B$ e $x \notin A$

$$\emptyset \subseteq A, \ \forall A \text{ insieme}$$

INSIEME UNIVERSO E COMPLEMENTARE

$$\overline{A} = \{ X \mid X \in U \text{ e } X \notin A\}$$

<u>Esempio.</u> $U = N$ $\quad P = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$ insieme numeri pari

$\overline{P} = \{x \mid x = 2n + 1, n \in N\}$

è l'insieme dei numeri dispari

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

UNIONE TRA INSIEMI: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

$A \cup A = A$ se $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

INTERSEZIONE TRA INSIEMI: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

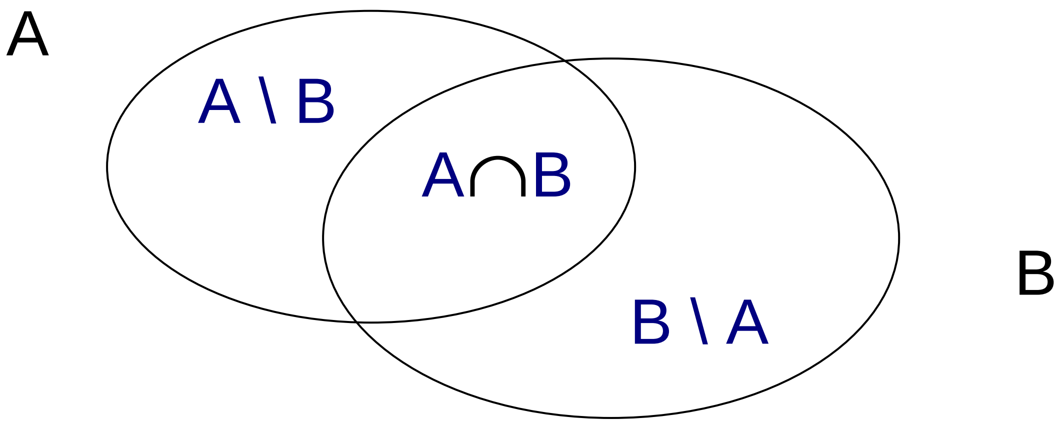
$A \cap A = A$ se $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

Esempi

- $A = \{1,2,4,6\}$ e $B = \{1,3,8\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$
  $A \cap B = \{1\}$
- $C = \{a,b,c,d\}$ e $D = \{a,b\}$ allora $C \cup D = C$
  $C \cap D = D$

Due insiemi si dicono disgiunti $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

DIFFERENZA TRA INSIEMI: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

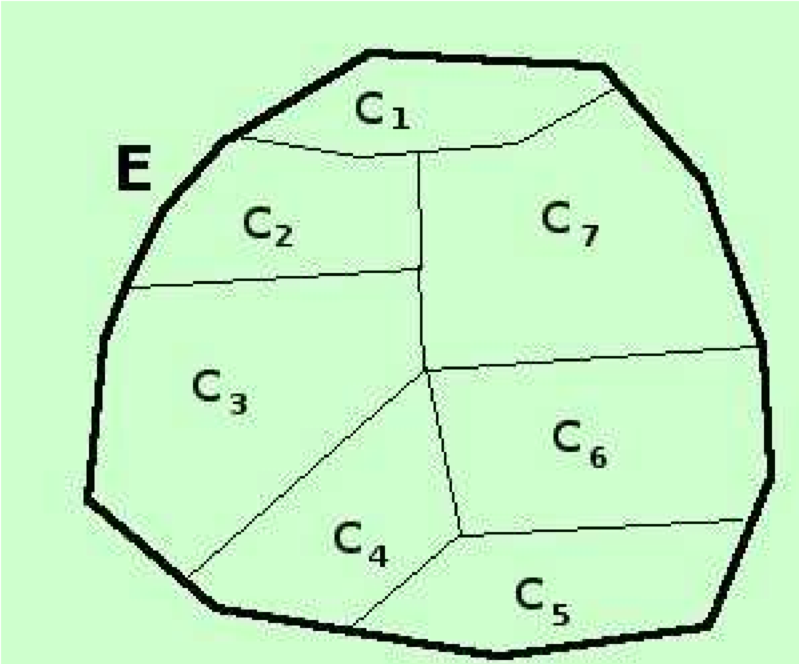


Esercizio: Verifica che $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad\qquad A \cup \overline{A} = U$$

Def. Si chiama **Partizione** di un insieme A una collezione di sottoinsiemi non vuoti di A tali che:

- sono a due a due disgiunti
- la loro unione è uguale all'insieme A



$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

Una possibile partizione di A

$C_1 = \{1\}$; $C_2 = \{4,5\}$ $C_3 = \{2,3,6\}$

<u>PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI</u>

<u>Proprietà commutativa</u> $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Proprietà associativa $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Leggi di assorbimento (per esercizio)

$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Leggi di De Morgan (per esercizio)

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Esercizio: Siano A e B sottoinsiemi disgiunti dell'insieme universo *U*.

Verificare che $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

PROPOSIZIONI LOGICHE. CONNETTIVI LOGICI E TAVOLE DI VERITÀ

DEF. Una *proposizione* è una qualsiasi affermazione di cui si possa dire con certezza se essa è *vera* o *falsa*.

- Valori di verità: Vero, Falso (“tertium non datur”)

P = “7 è un numero dispari” VERA

Q = “3>9” FALSA

“Composizione” di proposizioni mediante connettivi

Connettivi Logici:

1) Disgiunzione “o” $[(P\ vel\ Q), (P \vee Q), (P\ \mathrm{or}\ Q)]$
è vera se P è vera <u>o</u> se Q è vera <u>o</u> se sia P che Q sono vere, altrimenti è falsa

2) Congiunzione “e” $[(P\ et\ Q), (P \wedge Q), (P\ and\ Q)]$
è vera se P è vera <u>e</u> Q è vera, altrimenti è falsa

3) Negazione “non” $[(P), \neg P, not(P)]$
è vera quando P è falsa e viceversa

TAUTOLOGIA: proposizione sempre vera $P \vee \neg P$ tautologia
CONTRADDIZIONE: proposizione sempre falsa $P \wedge \neg P$ contraddizione

TAVOLA DI VERITA'

P	**Q**	**P** $\vee$ **Q**	**P** $\wedge$ **Q**	$\neg$ **P**
V	V	V	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Predicati = proposizioni logiche contenenti una o più variabili e il cui valore di verità dipende dal valore assunto dalle variabili.

Scriviamo $P(x)$ per indicare che l'oggetto x soddisfa alla proprietà P

Esempio. $P(x)$ = "x è un numero primo"
$Q(x)$ = "x è un numero naturale minore di 10"

$A = \{x \mid x \text{ è un numero primo}\}$

$B = \{x \mid x \in N, x < 10\}$

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{ x \mid P \vee Q\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{ x \mid P \wedge Q\} = \{2,3,5,7\}$

$\overline{A} = \{ x \mid \neg P\} = \{ x \mid x \text{ non è primo}\}$

<u>Implicazione (se.. allora)</u>: $P \rightarrow Q$ è falsa quando l'*ipotesi* (o *antecedente*) P è vera e la *tesi* (o *conseguente*) Q è falsa, altrimenti è vera

C: insieme dei canguri
D: insieme dei mammiferi

P : x è un canguro
Q: x è un mammifero

Dal punto di vista insiemistico: $\mathbf{C} \subset \mathbf{Q}$ $(x \in C \Rightarrow x \in Q)$

Dal punto di vista della logica: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$

(se x è un canguro allora x è un mammifero)

Coimplicazione (se e solo se): $P \leftrightarrow Q$ è vera quando sia P che Q hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere oppure entrambe false), altrimenti è falsa.

La relazione corrispondente tra insiemi è l'uguaglianza

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

P	**Q**	**$P \rightarrow Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Predicati = proposizioni logiche contenenti una o più variabili e il cui valore di verità dipende dal valore delle variabili.

Scriviamo P(x) per indicare che l'oggetto x soddisfa alla proprietà P

Esempio. P(x) = "x è un numero primo"
Q(x) = "x è un numero naturale minore di 10"

P(11) è vera, ma Q(11) è falsa.

Q(4) è vera, ma P(4) è falsa.

$P \leftrightarrow Q$ è quindi sempre falsa, mentre $\neg(P \leftrightarrow Q)$ è sempre vera

Esercizio:

Verificare che i seguenti enunciati composti hanno le stesse tavole di verità (a sin e dx del simbolo di identità)**:**

- Doppia negazione: $\neg(\neg A) = A$

- Leggi di De Morgan: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

- Negazione dell'implicazione: $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$

- Contronominale: $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$

- Doppia Implicazione: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Soluzioni:

Doppia negazione: $\neg(\neg A) = A$

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
V	F	V
F	V	F

Leggi di De Morgan:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

• Negazione dell'implicazione:

$\neg (A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A \rightarrow B}$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

• Contronominale: $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

• Doppia Implicazione:

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Esercizio: Usando una tavola di verità si provi che sono valide le seguenti regole, con P, Q ed R proposizioni arbitrarie:

1) $P \vee P \leftrightarrow P$ $\qquad$ $P \wedge P \leftrightarrow P$

2) $(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $\qquad$ leggi associative

$(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

3) $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $\qquad$ leggi distributive

$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI

Siano P e Q due proposizioni.

Un implicazione del tipo $P \longrightarrow Q$ è detta TEOREMA

P è detta IPOTESI, mentre Q è detta TESI

In tal caso <u>Q è detta CONDIZIONE NECESSARIA per P</u>, vuol dire che se è vera P allora è necessariamente vera anche Q.

Invece <u>P è detta CONDIZIONE SUFFICIENTE per Q</u>, in quanto se il valore di verità di P è sufficiente a garantire la verità di Q

Una CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE si ha nel caso in cui ($P \longrightarrow Q$ e $Q \longrightarrow P$). In tal caso si scriverà $P \longleftrightarrow Q$ (P se e solo se Q)

QUANTIFICATORI

Ricordiamo:

$\forall$ "per ogni" quantificatore universale

$\exists$ "esiste" quantificatore esistenziale

! "uno ed uno solo" unicità

Utilizzi:

1) Per ogni numero reale esiste un altro numero reale, lo zero, che sommato al primo restituisce il numero di partenza:

$$\forall x \in R, \exists 0 \in R \mid x + 0 = x$$

2) Per ogni numero naturale esiste uno e un sol numero che moltiplicato per il primo restituisce il numero di partenza

$$\forall x \in N, \exists! 1 \in N \mid x * 1 = x$$

I quantificatori non possono essere commutati

Esempio. Siano x, y $\in$ R

$$\forall x \in R \;\; \exists y \in R \mid x > y \qquad \text{VERA}$$

$$\exists x \in R \;\; \forall y \in R \mid x > y \qquad \text{FALSA}$$

Negazioni – quantificatori – connettivi logici:

$$\neg(\forall x \mid P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \mid \neg P(x))$$

Non tutti gli uomini sono bugiardi $\Leftrightarrow$ esiste almeno un uomo che non è bugiardo

$$\neg(\exists x \mid P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \mid \neg P(x))$$

Non esiste un animale feroce $\Leftrightarrow$ Tutti gli animali non sono feroci

$$\neg(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\neg P(x)) \wedge (\neg Q(x)))$$

$$\neg(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))$$

$$\neg(\neg(P(x))) \Leftrightarrow P(x)$$

Giudizio Universale Affermativo (simbolo A)

$$\forall x:\ \mathrm{D}(x) \rightarrow P(x)$$

(Negazione)

$$\exists x:\ \mathrm{D}(x) \wedge \overline{P(x)}$$

Giudizio Universale Negativo (simbolo E)

$$\forall x:\ \mathrm{P}(x) \rightarrow \overline{M(x)}$$

(Negazione)

$$\exists x:\ \mathrm{P}(x) \wedge M(x)$$

Giudizio Particolare Affermativo (simbolo I)

$$\exists x:\ \mathrm{N}(x) \wedge P(x)$$

(Negazione)

$$\forall x:\ \overline{\mathrm{N}(x)} \vee \overline{P(x)}$$

Giudizio Particolare Negativo (simbolo O)

$$\exists x:\ \mathrm{S}(x) \wedge \overline{V(x)}$$

(Negazione)

$$\forall x:\ \overline{\mathrm{S}(x)} \vee V(x)$$