FUNZIONE ESPONENZIALE E FUNZIONE LOGARITMICA
CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE BATTERICA
DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE
SIMMETRIE E GRAFICI DEDUCIBILI

FUNZIONI ESPONENZIALI

➢ Crescita di una popolazione batterica

Se prendiamo in esame un microrganismo, che si riproduce per scissione binaria, e lo facciamo crescere in un sistema chiuso il numero della popolazione batterica che esso produrrà varierà nel tempo secondo cinque principali fasi:

- Fase di latenza: in questa fase il numero di microrganismi rimane pressoché costante. Questo perché il microrganismo deve adattarsi al tipo di terreno in cui è stato inoculato e ciò può durare anche diverse ore.
- <u>**Fase esponenziale:** il microrganismo si divide in maniera esponenziale con velocità di crescita costante, raddoppiando la loro popolazione a intervalli regolari.</u>
- Fase di transizione: la velocità di crescita comincia a rallentare.
- Fase stazionaria: non vi è un aumento netto della popolazione microbica perché vi è equilibrio tra divisione e morte cellulare. Ciò succede per un nutriente che scarseggia, per l'accumulo di sostanze tossiche, per il pH divenuto troppo basso, e per densità della popolazione.
- Fase di morte: la popolazione microbica diminuisce con un andamento logaritmo come è avvenuto per la fase esponenziale.

Analizziamo la fase esponenziale:

Per semplicità assumiamo che tutte le duplicazioni avvengano nello stesso istante. Sia N_k la numerosità della generazione k – esima, allora la numerosità della generazione (k -1) – esima sarà N_{k-1}.

Che relazione intercorre tra le numerosità di due generazioni successive?

$$N_k = 2\, N_{k-1}$$

Se indico con N_0 la numerosità della prima generazione (k = 0), allora si avrà

- ✓ $N_1 = 2\, N_0$
- ✓ $N_2 = 2\, N_1 = 4\, N_0 = 2^2\, N_0$
- ✓ $N_3 = 2\, N_2 = 8\, N_0 = 2^3\, N_0$ and so on …

In genere:

$$N_k = N_0 \cdot 2^k$$

Tale relazione non va confusa con una funzione potenza, in quanto nelle funzioni potenza la variabile indipendente x è alla base e non all'esponente.

Una funzione del tipo $y = f(x) = a^x$ con a > 0 e $a \neq 1$ si definisce funzione esponenziale.

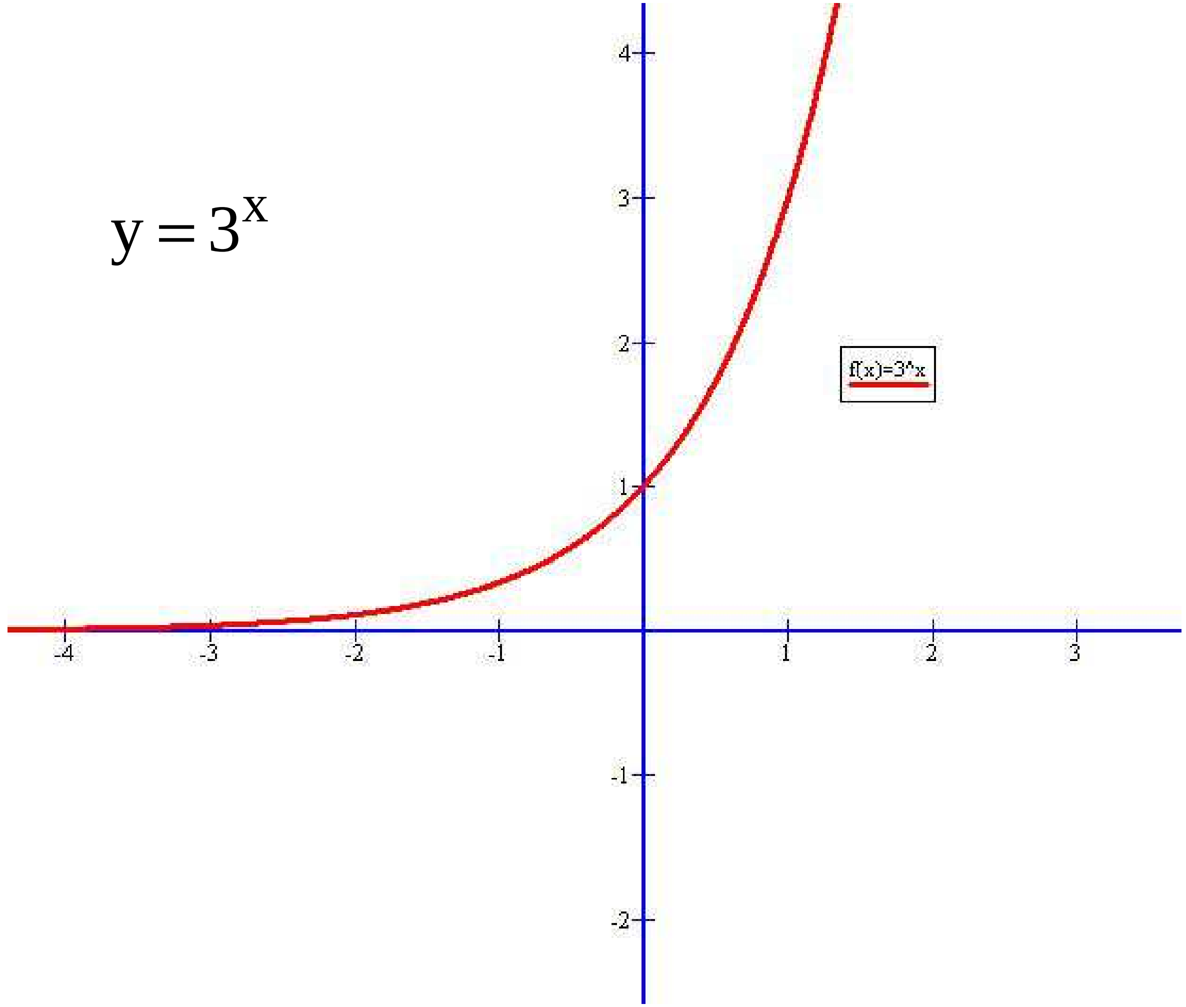
$\boxed{a > 1}$

- ✓ Dominio: R
- ✓ Codominio: $]0,+\infty[$
- ✓ Funzione monotona crescente in senso stretto
- ✓ y > 0 $\forall x \in R$
- ✓ Andamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

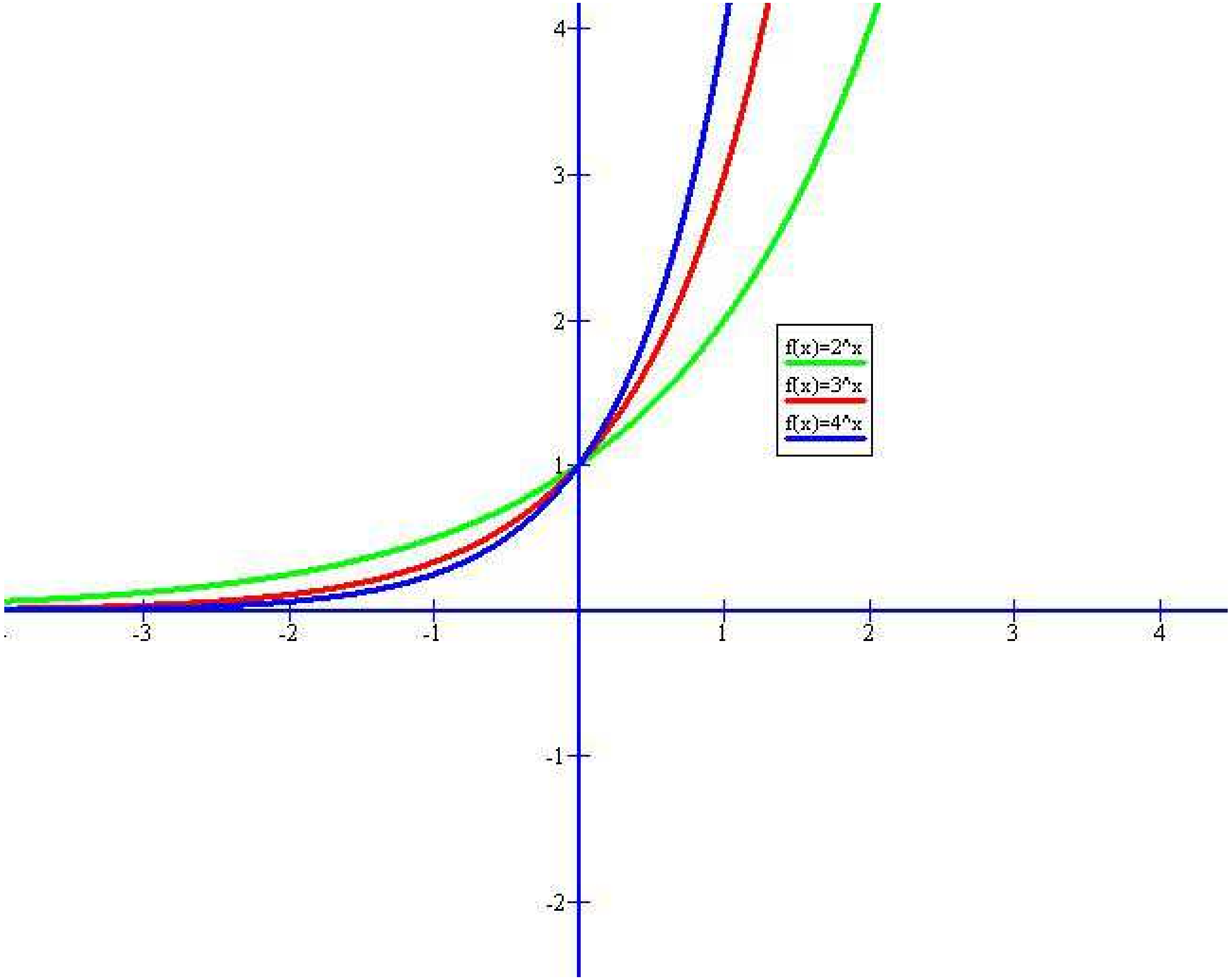
$y = 3^x$



$$y = 2^x$$

$$y = 3^x$$

$$y = 4^x$$



OSSERVAZIONE

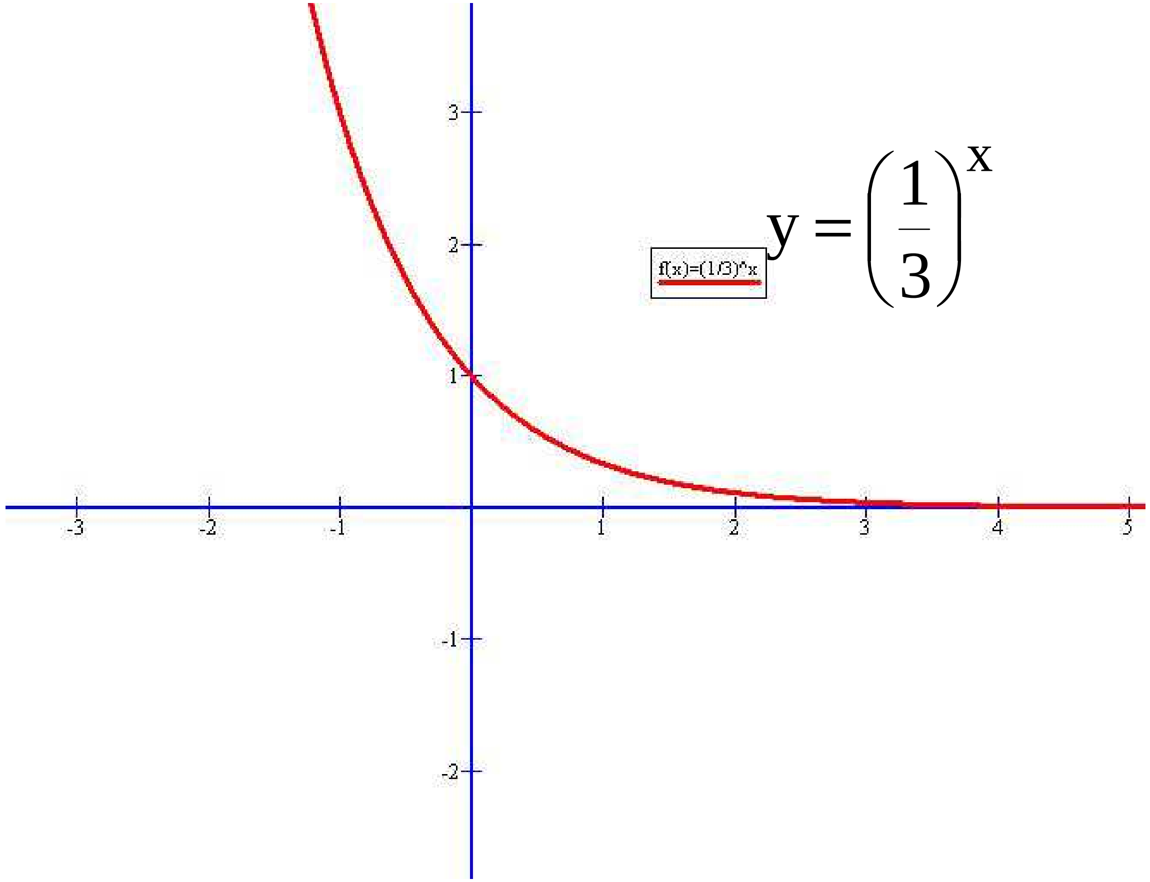
✓ La funzione cresce tanto più rapidamente quanto maggiore è la base.

✓ La funzione passa sempre per il punto (0,1)

$\boxed{0 < a < 1}$

- Dominio: R
- Codominio: $]0,+\infty[$
- Funzione <u>monotona decrescente in senso stretto</u>
- $y > 0 \quad \forall x \in R$
- Andamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

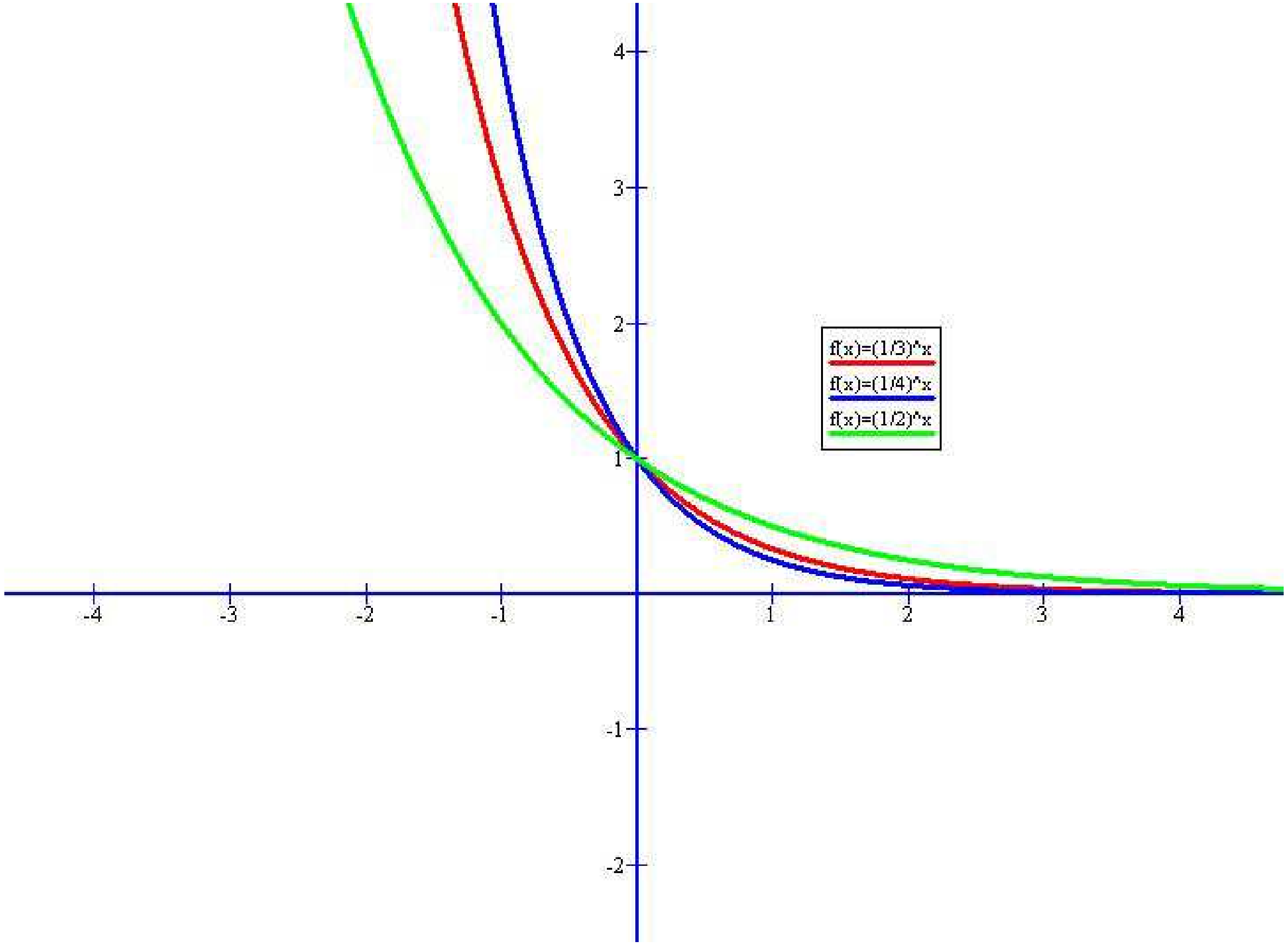


$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$



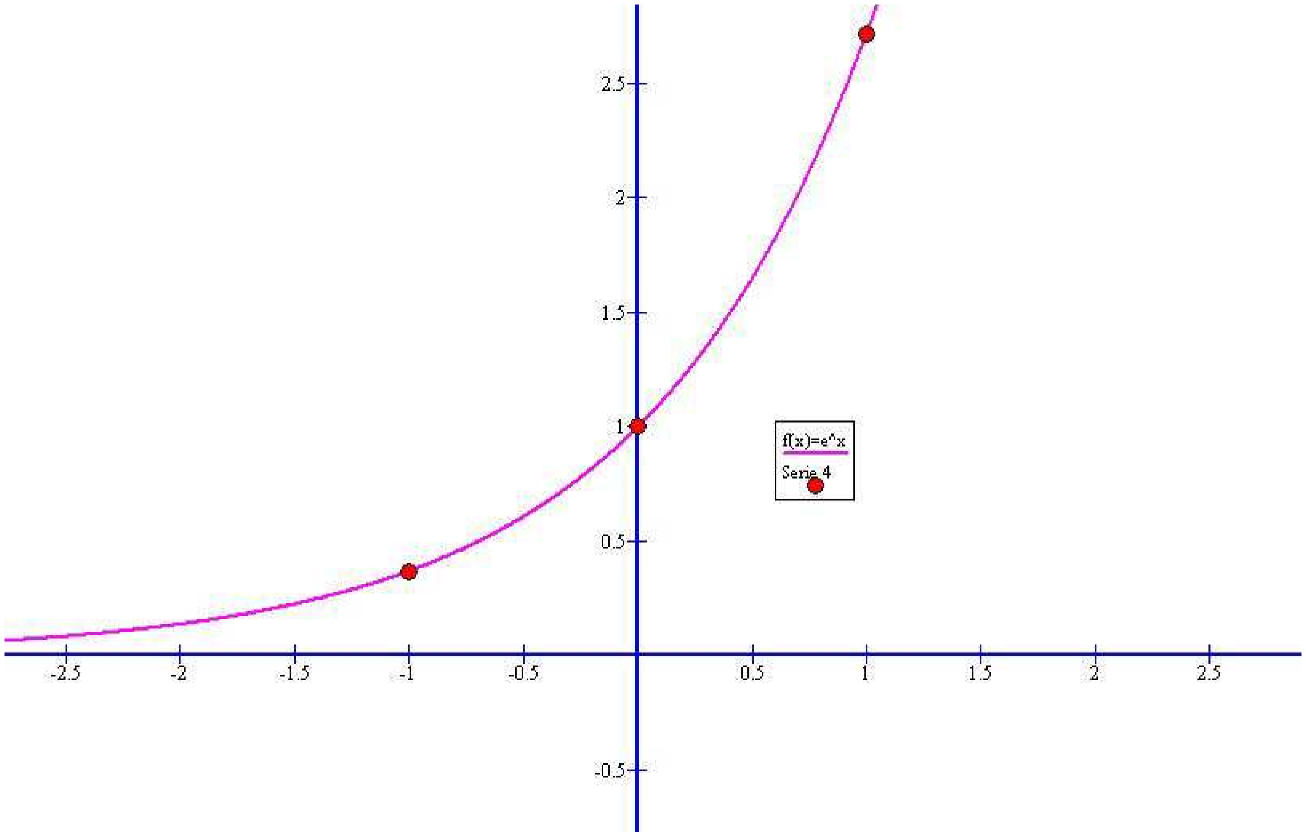
OSSERVAZIONE

- ✓ La funzione decrescente tanto più rapidamente quanto più piccola è la base
- ✓ Passa sempre per il punto (0,1)

Base naturale:

$y = e^x$

e è un numero trascendente definito come limite di una successione



$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e=2.718281828…

- Decadimento radioattivo
- Modello di Malthus

DEF. Si definisce logaritmo in base a di b l'esponente da dare alla base a per avere come risultato b.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

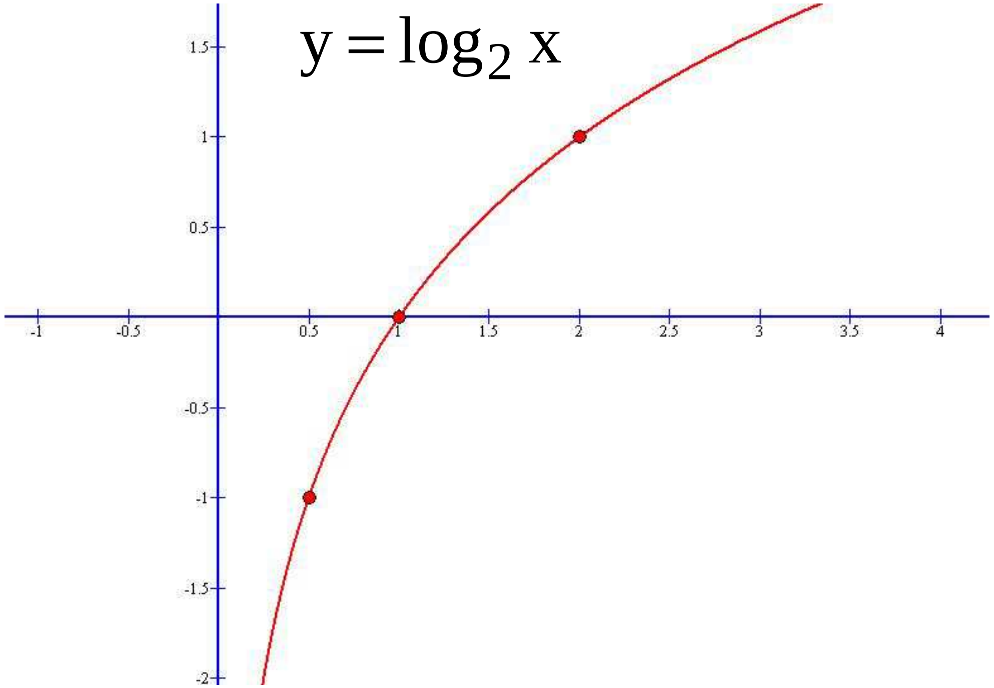
Poiché $a^0 = 1$ allora **$\log_a 1 = 0$**, quindi la funzione logaritmica interseca l'asse delle ascisse nel punto (1,0)

FUNZIONE LOGARITMICA

Una funzione del tipo $y = f(x) = \log_a x$ con a > 0 e $a \neq 1$ si definisce funzione logaritmica.

$\boxed{a > 1}$

- Dominio: $]0, +\infty[$
- Codominio: R
- Funzione monotona crescente in senso stretto
- y > 0 con x > 1
  y < 0 con 0 < x <1
- Andamento agli estremi del dominio:



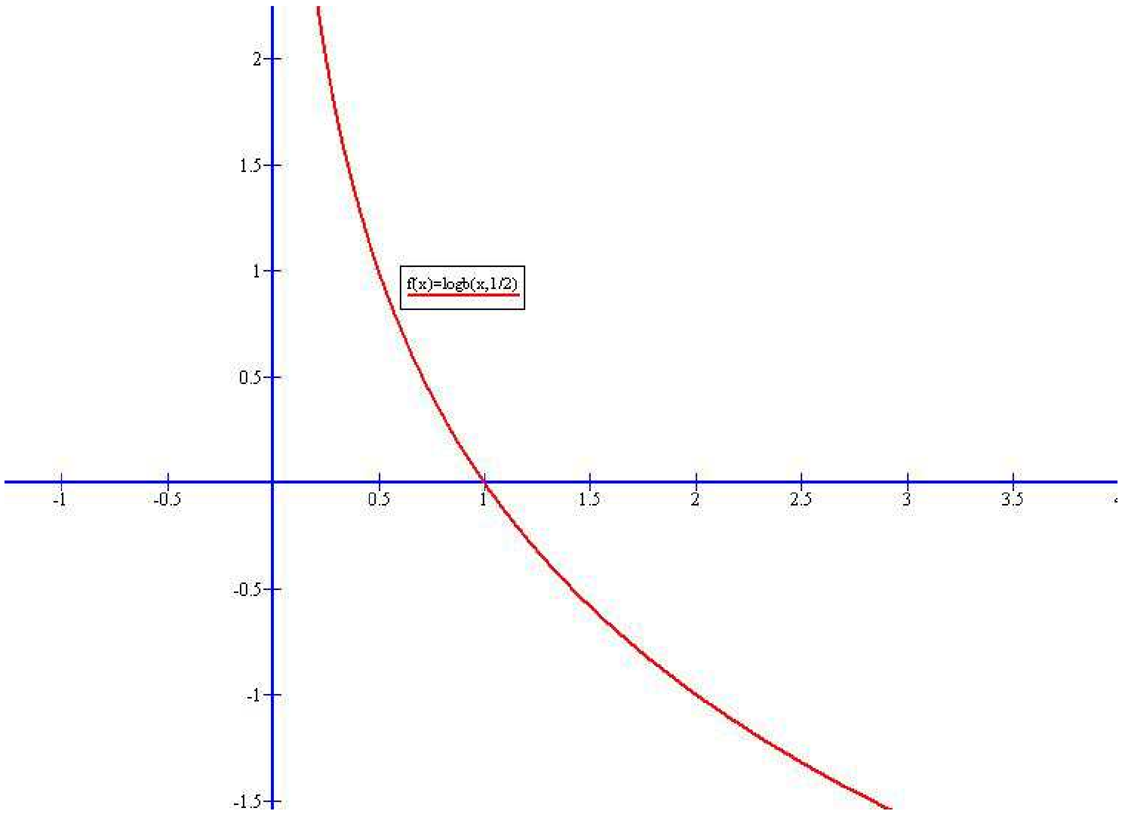
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$0 < a < 1$

- ✓ Dominio: $]0,+\infty[$
- ✓ Codominio: R
- ✓ Funzione <u>monotona decrescente in senso stretto</u>
- ✓ y > 0 con 0 < x < 1
  y < 0 con x > 1
- ✓ Andamento agli estremi del dominio:

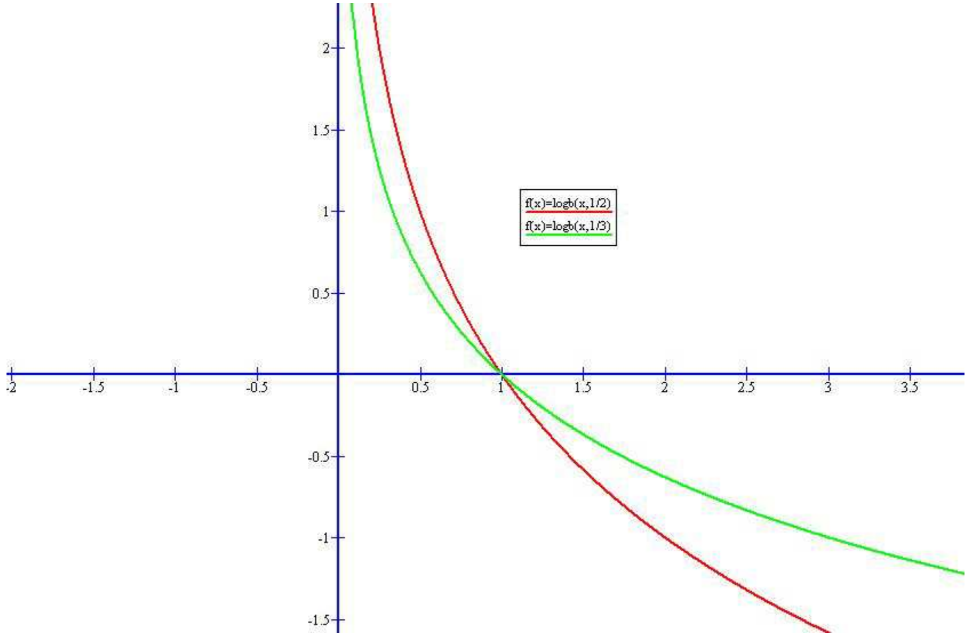
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$



$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

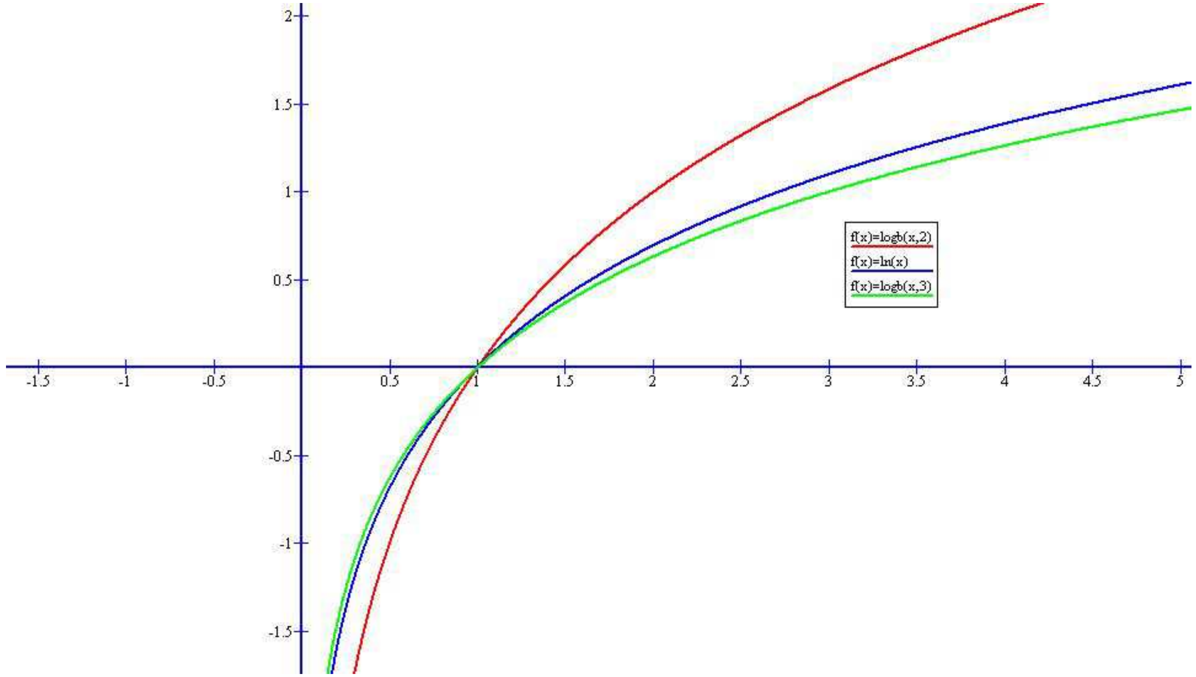
$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$



$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_e x$$

$$y = \log_3 x$$



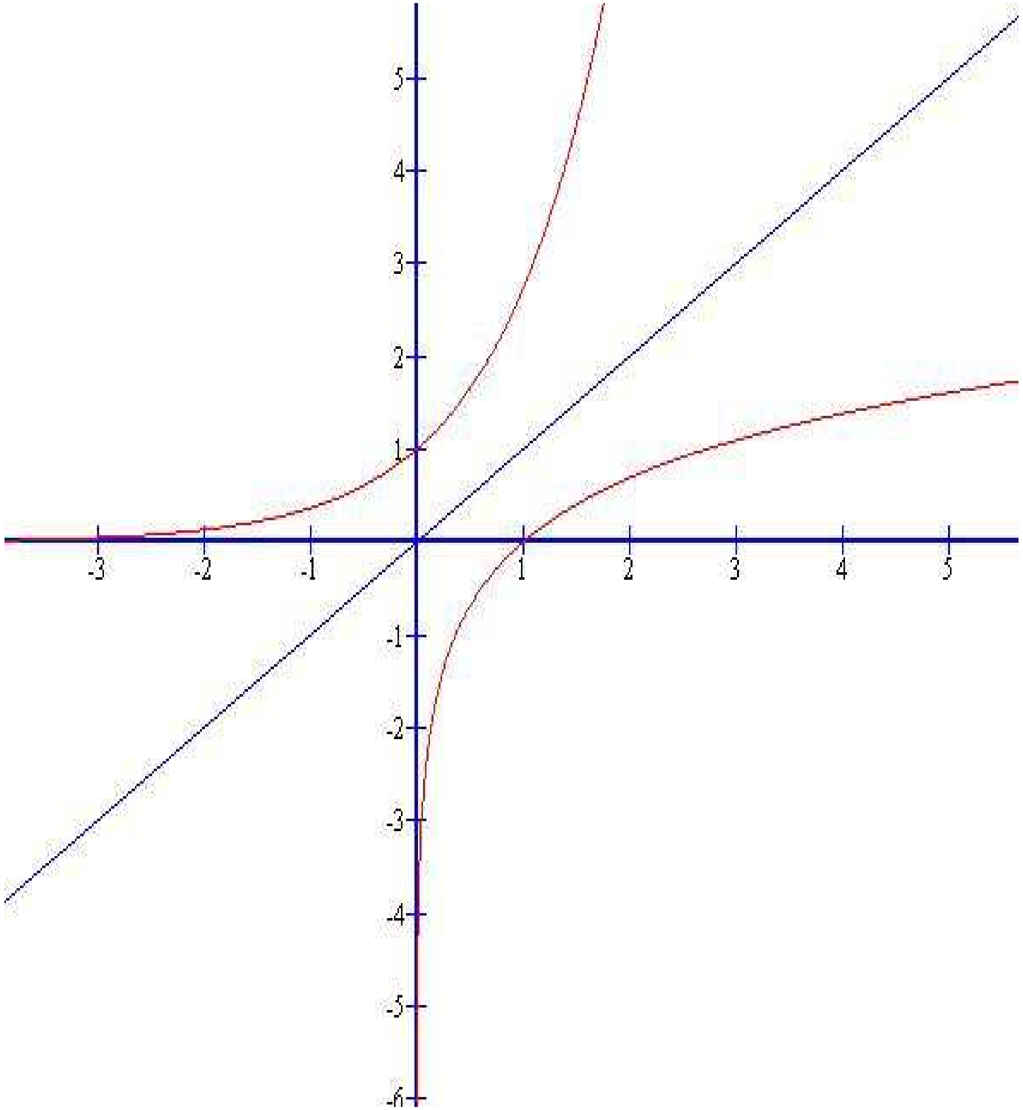
$y = a^x$ $\qquad$ $y = \log_a x$

Sono l'una l'inversa dell'altra

Pertanto componendole si ottiene:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$



PROPRIETA' DEI LOGARITMI

$\forall x, y > 0 \text{ e } a > 0$

- ✓ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- ✓ $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- ✓ $\log_a x^b = b \log_a x$
- ✓ $\log_a \left(\frac{1}{x} \right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$ logaritmo del reciproco
- ✓ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ proprietà del cambiamento di base

Le funzioni $y = \ln(x^2 + x - 6)$ e $y = \ln(x - 2) + \ln(x + 3)$ sono uguali?

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

✓ $2^{x^2-3x} = -5$ $\qquad$ $5^x + 5^{x+1} + 3\cdot 5^{x+2} = 2025$

✓ $\dfrac{3^{2x+1}\cdot 81}{3^{1-x}} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $5^x \cdot (5^{x+1} + 9) = 2$

a > 1 la funzione è crescente in senso stretto

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Pertanto $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ e $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$

0 < a < 1 la funzione è decrescente in senso stretto

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Pertanto $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ e $a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b$

ESEMPI

- ✓ $6^{x+3} < 0$ $\quad 4^{x-2} < -3$ $\quad 2^{x^2} > -7$ $\quad 5^{3x+1} > 0$
- ✓ $7^{\sqrt{3+x-2x^2}} - 7^{2-x} < 0$
- ✓ $\begin{cases} 3^{1-x} + 3^{1+x} > 6 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \end{cases}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

a > 1 la funzione è crescente in senso stretto

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

0 < a < 1 la funzione è decrescente in senso stretto

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

- ✓ $\log_2\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) < -2$
- ✓ $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) < \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$
- ✓ $\log_{\frac{1}{2}}(4x + x^2) \leq 1$
- ✓ $\ln(4x+1) > \ln(2x-1) + \ln(5-x)$

DOMINI

- ✓ Funzioni razionali fratte $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ $D(x) \neq 0$
- ✓ Funzioni radice di indice pari $y = \sqrt{A(x)}$ $A(x) \geq 0$
- ✓ Funzioni logaritmiche $y = \log_a [A(x)]$ $A(x) > 0$

ESEMPI

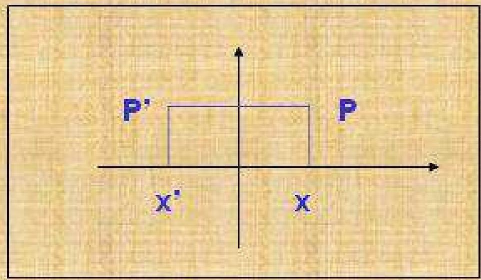
- ✓ $y = \sqrt{\ln(x^2 - 9)}$

$$y = \begin{cases} \log_2(x+2) & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} & x < 0 \end{cases}$$

- ✓ $y = \sqrt{\dfrac{1 - 4x^2}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$

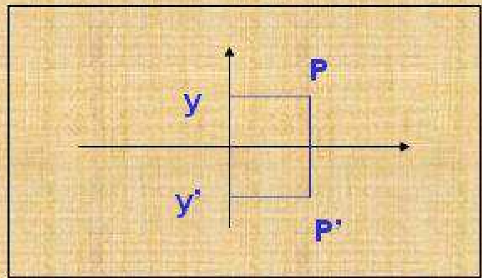
SIMMETRIA DI ASSE R: associa ad ogni punto P del piano un punto P' tale che il segmento PP' sia perpendicolare ad r e il suo punto medio M $\in$ r.

$$S_y \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all'asse y

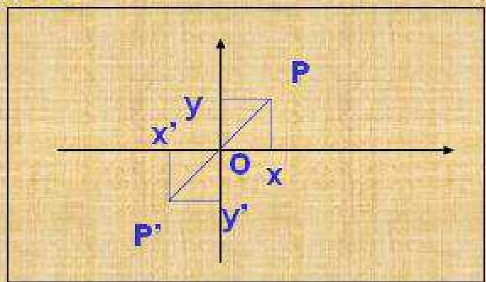
$$S_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all'asse x

SIMMETRIA DI CENTRO O: associa ad ogni punto P del piano un punto P' tale che il segmento PP' abbia come centro O

$$S_c \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all'origine

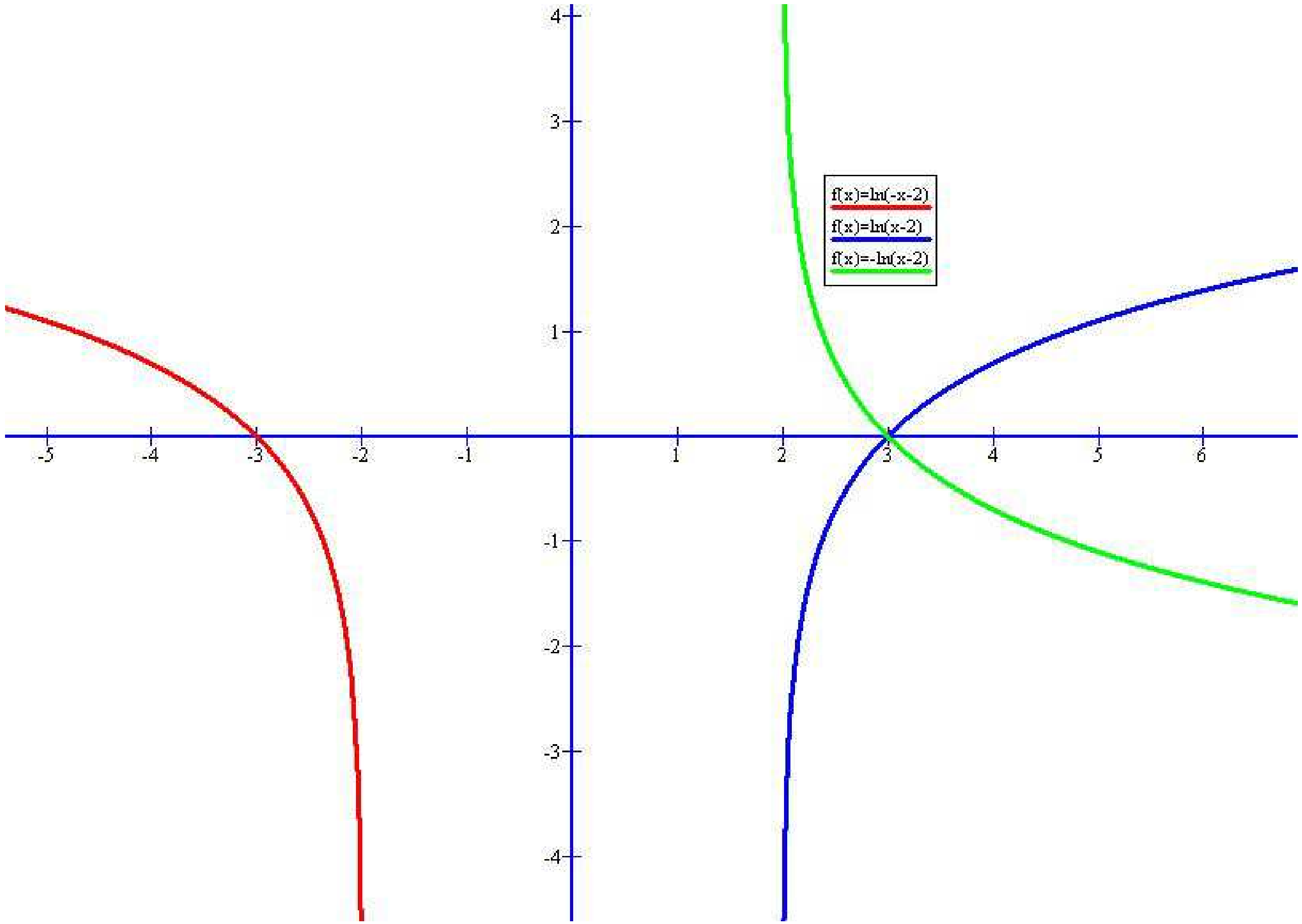
ALCUNE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

SIMMETRIE

y = f(x)
(funzione in blu)

y = f(- x)
simmetria rispetto all'asse y
(in rosso)

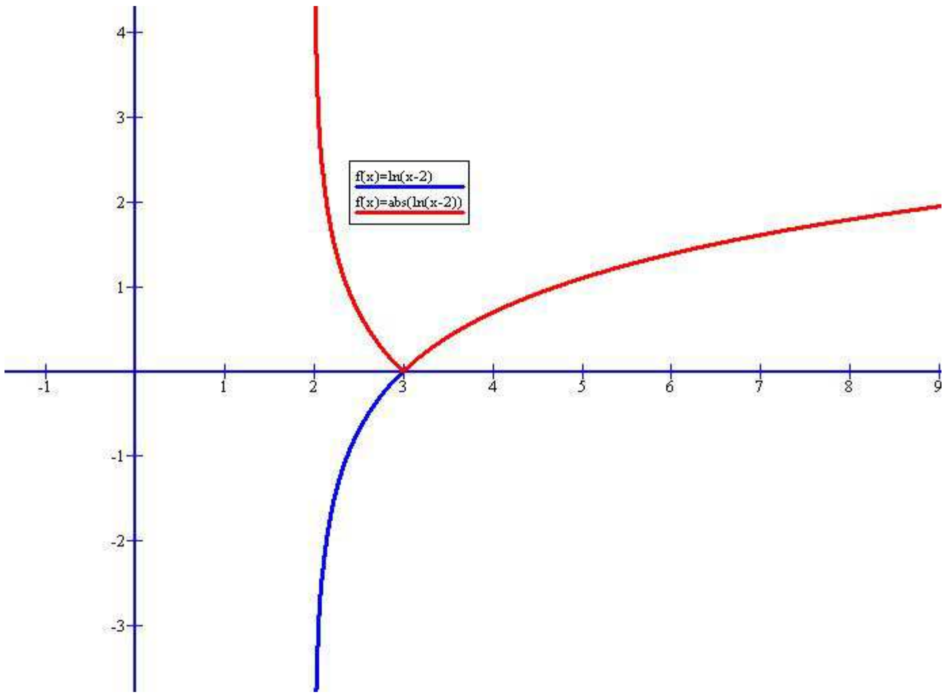
y = - f(x)
simmetria rispetto all'asse x
(in verde)



GRAFICI DEDUCIBILI

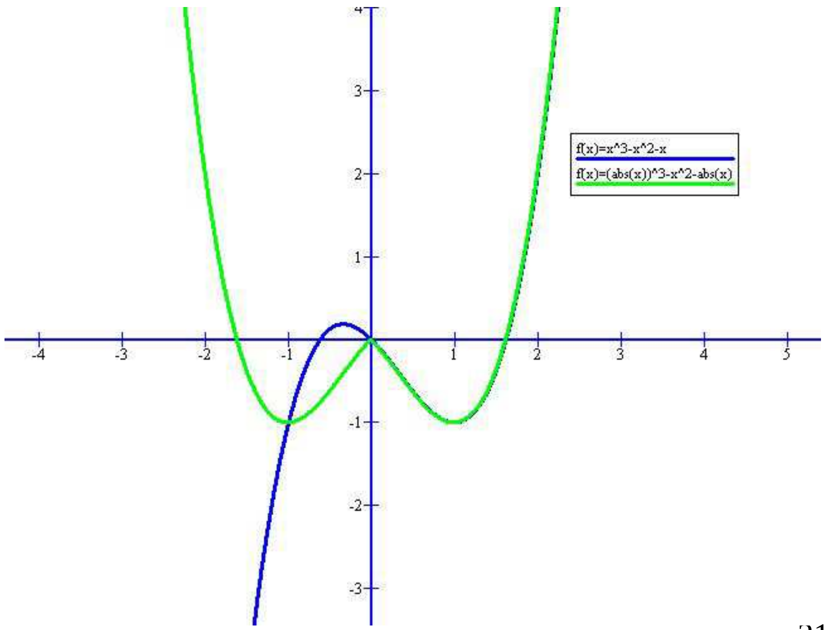
$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

Coincide con la funzione stessa dove essa è positiva, mentre costruisco la simmetrica rispetto all'asse x solo nei tratti in cui la funzione è negativa.



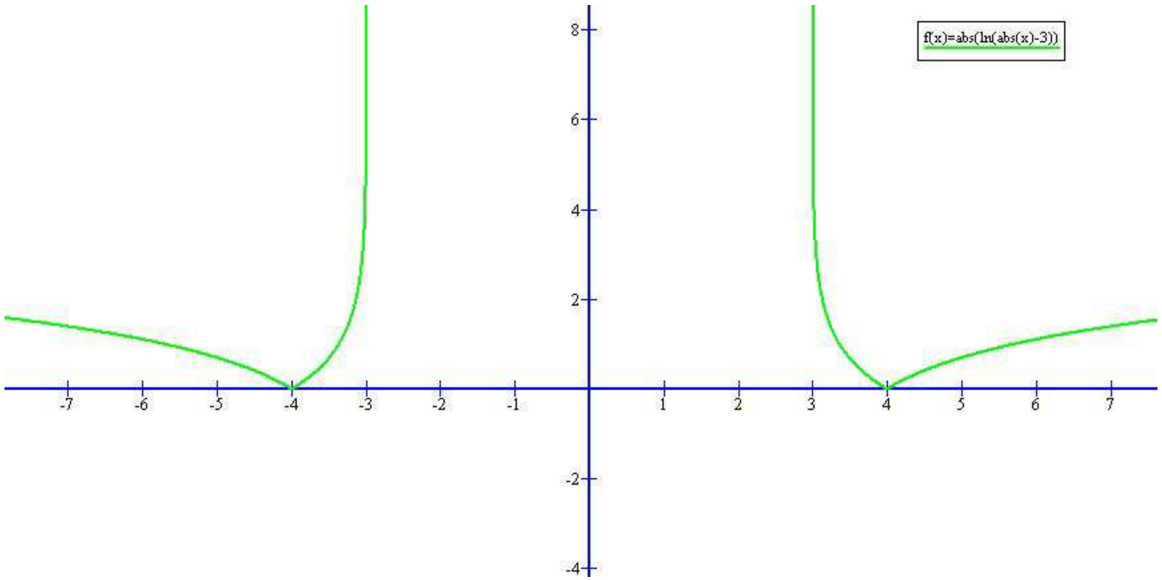
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Coincide con la funzione dove la variabile x è positiva, mentre va tracciata la sua simmetrica rispetto all'asse y solo nel tratto in cui x è negativa.



GRAFICI DEDUCIBILI

$$y = |\ln(|x| - 3)|$$



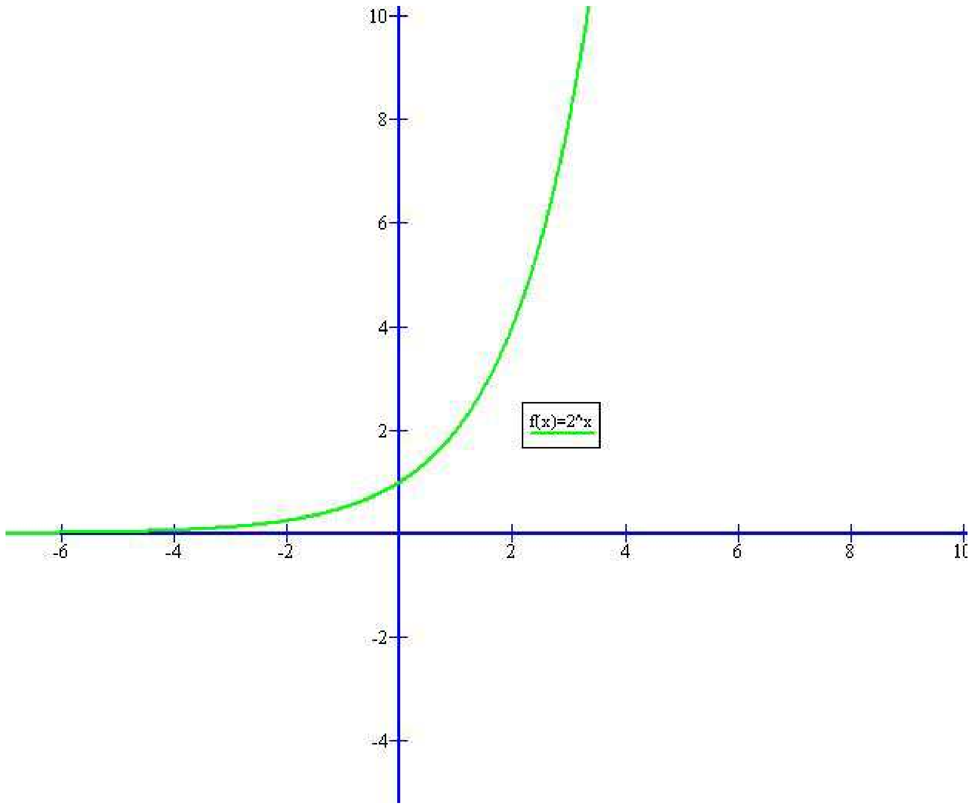
GRAFICI IN SCALA LOGARITMICA

I riferimenti in scala logaritmica sono riferimenti in cui in ascissa pongo una scala lineare classica, mentre in ordinata, anziché la funzione y = f(x), verrà riportato il log(f(x)). Sono utili per realizzare grafici di andamenti esponenziali. Tali andamenti saranno visualizzati tramite una retta.

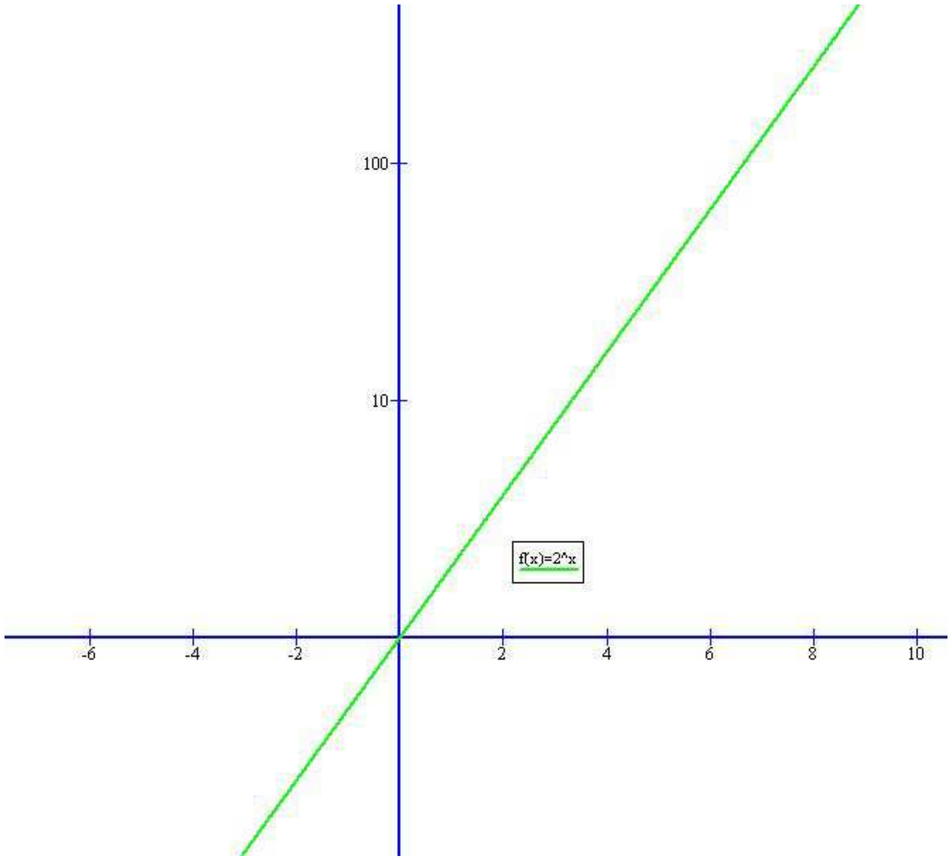
Un fenomeno descritto da un andamento esponenziale $y = c \cdot e^{ax}$ sarà rappresentato da una retta

$$y = \ln f(x) = \ln c + ax$$

Se un fenomeno è descritto da una funzione lineare y = ax+b in scala logaritmica, esso avrà andamento esponenziale $f(x) = e^{b} e^{ax}$



10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
2
4
6
8
f(x)=2^x



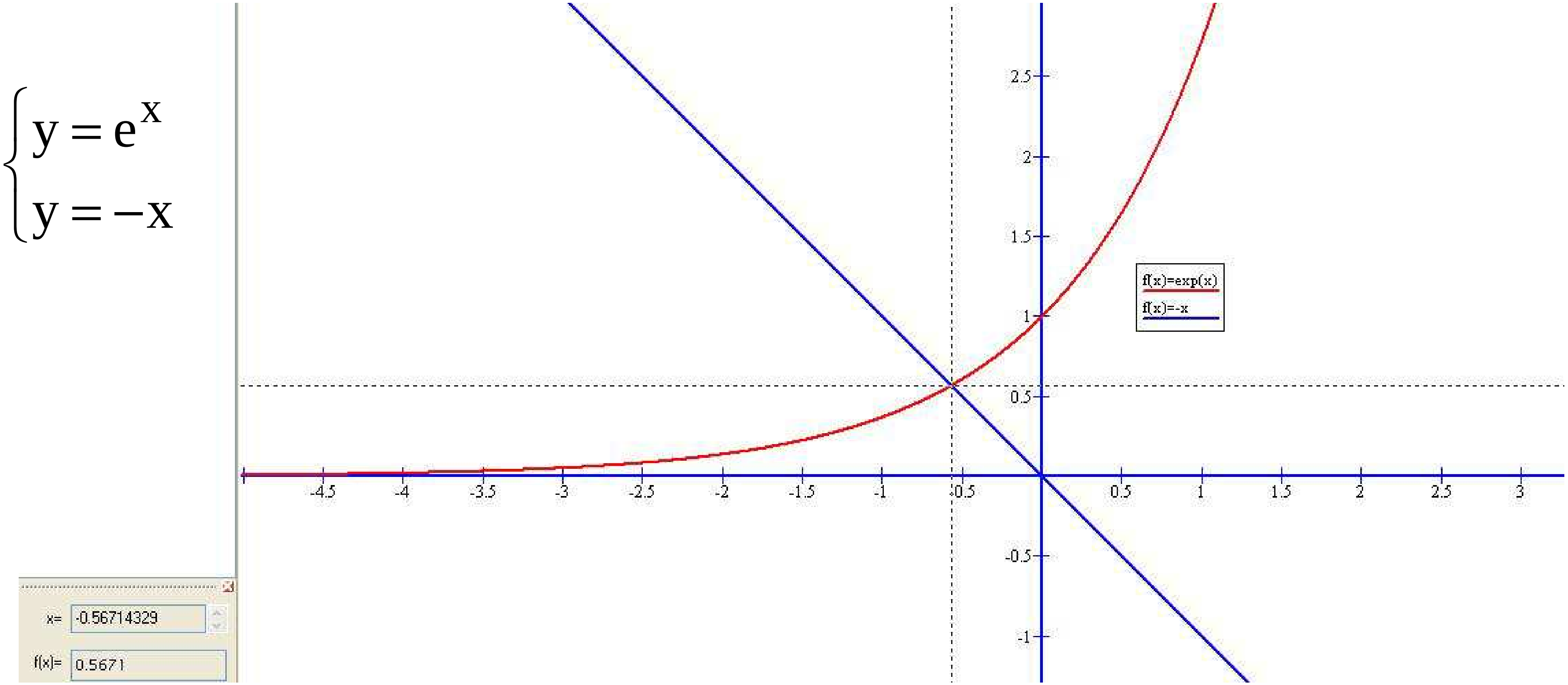
100
10
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
f(x)=2^x

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON CONFRONTO GRAFICO

$$e^x + x = 0$$

Non risolubile algebricamente

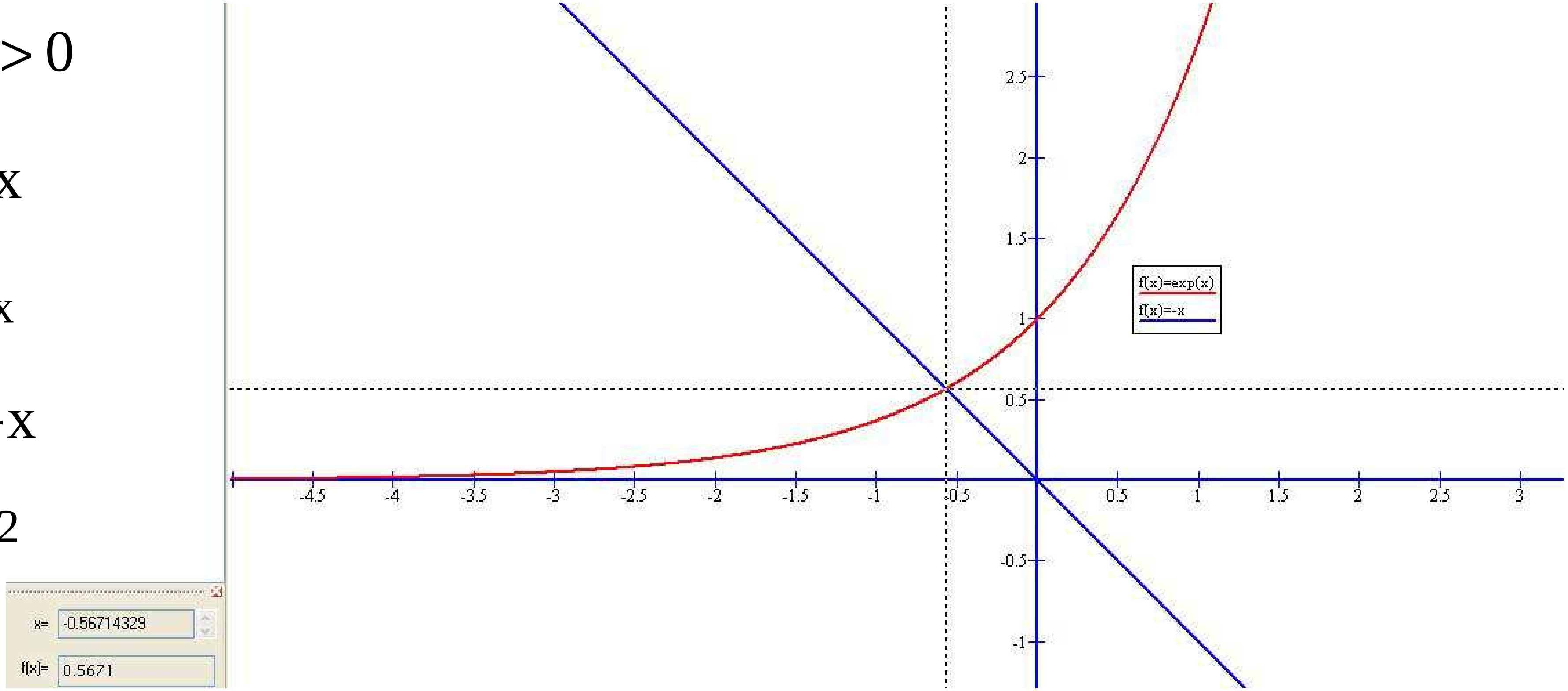
$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -x \end{cases}$$



$$e^x + x > 0$$

$$e^x > -x$$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = -x \\ y_1 > y_2 \end{cases}$$



Vera per $x > x_0$ dove $x_0 \cong -0.56714329....$

Valuta: $\log x - x > 0$ $\log x + x > 0$