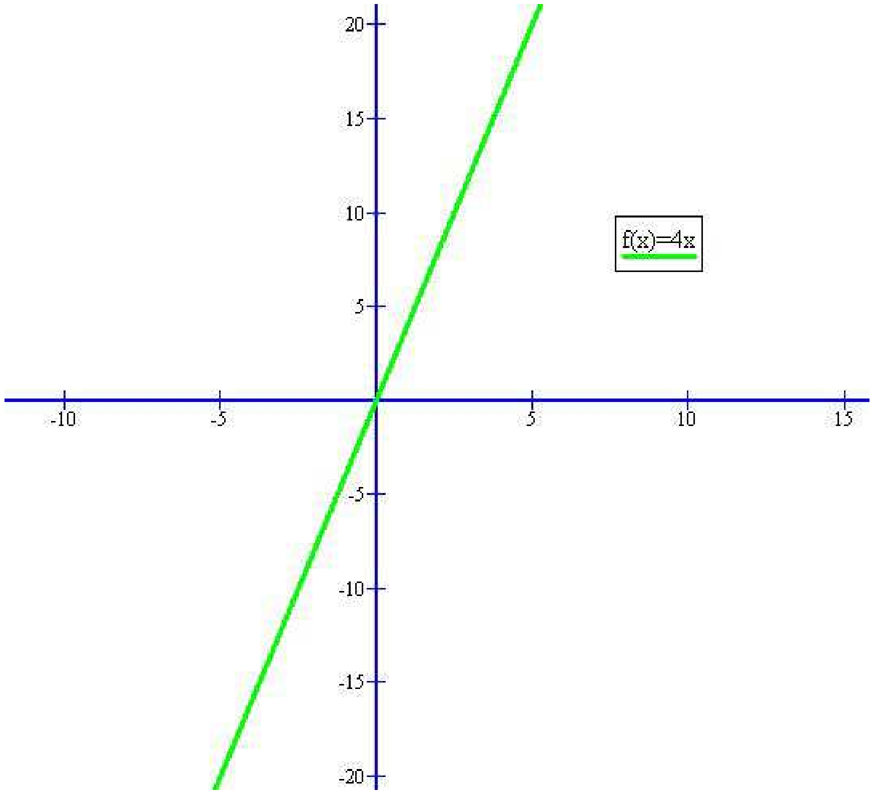
FUNZIONI ELEMENTARI
RICHIAMI SULLE DISEQUAZIONI E TRASLAZIONI

Una funzione del tipo $f(x) = mx + q$, con m e q numeri reali, è una FUNZIONE LINEARE. Il numero q è detto INTERCETTA o ORDINATA ALL'ORIGINE, il termine m è detto COEFFICIENTE ANGOLARE.



Tale funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e rappresenta una retta del piano cartesiano non parallela all'asse y.

Se $q = 0$, allora la retta passa per l'origine degli assi.
Esempio. $y = 4x$
In tal caso le due grandezze x e y sono tra loro in una relazione di proporzionalità diretta.

Def. Due grandezze si definiscono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante.

Legge di Hooke: la forza elastica di richiamo è direttamente proporzionale all'allungamento subito dalla molla o alla deformazione elastica, mediante una costante di proporzionalità k detta costante di elasticità. $F = -kx$

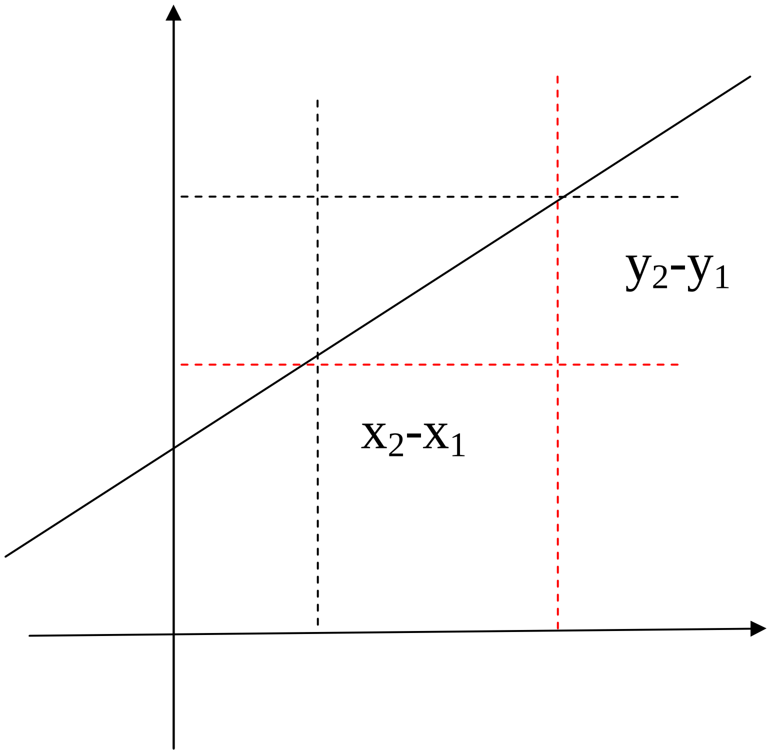
- Se x = 0 allora q = f(0) è detto VALORE INIZIALE. Tale valore assume un significato particolarmente importante se la variabile indipendente x è il tempo t. Il valore iniziale corrisponde all'intersezione della funzione con l'asse delle ordinate.

Durata del ciclo cellulare: (intervallo di tempo che intercorre tra una divisione e l'altra) Fase S

Posto t = 0 l'istante iniziale della fase.

P(t) = la frazione di DNA di una singola cellula che risulta duplicata all'istante t.

Dati sperimentali provano che $P(t) = a\,t$ *(funzione lineare del tempo) con a dell'ordine di decine di migliaia*



A (x_1,y_1) $B(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$$

dove α è l’angolo che la retta forma con l’asse delle ascisse valutato in senso antiorario.

RAPPORTO INCREMENTALE o TASSO DI VARIAZIONE

- Tasso di crescita del peso di un neonato tra la seconda e sesta settimana
- Tasso di dilatazione termica

m > 0 la retta è una funzione crescente

$(x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2)$

Per cui $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha > 0$

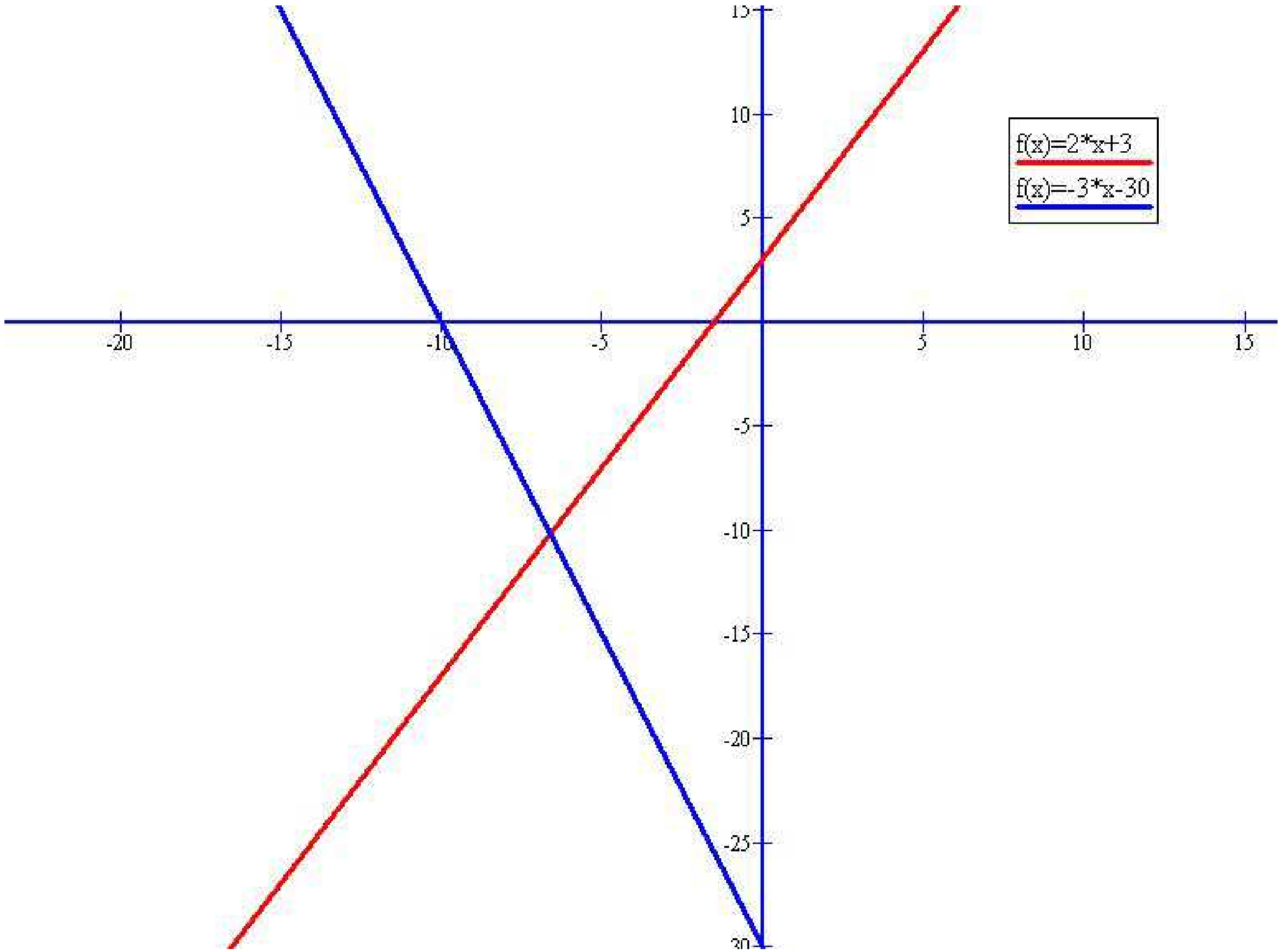
$\Rightarrow \alpha$ acuto

m < 0 la retta è una funzione decrescente

$(x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2)$

Per cui $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha < 0$

$\Rightarrow \alpha$ ottuso



Condizione di parallelismo tra rette: $r // r' \Leftrightarrow m = m'$

Condizione di perpendicolarità tra rette: $r \perp r' \Leftrightarrow m = -\frac{1}{m'}$

Equazione del fascio proprio di rette (retta passante per un punto assegnato $P(x_0,y_0)$): $y - y_0 = m(x - x_0)$

Equazione della retta passante per due punti: A (x_1,y_1) B(x_2,y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Gradi Celsius e Fahrenheit

	x = C	y = F
	Gradi Celsius °C	Gradi Fahrenheit °F
Temperatura di Congelamento	0°C	32°F
Temperatura di Ebollizione	100°C	212°F

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{F - 32}{212 - 32} = \frac{C - 0}{100 - 0}$$

$$F = 32 + \frac{9}{5}C$$

Es. Determinare la retta passante per $P=(2,-4)$ e perpendicolare alla retta $y=2x-7$

Es. Determinare la retta passante per $P=(-3,1)$ e parallela alla congiungente $A=(-2,0)$ e $B=(3,5)$

Es. Siano $r: y=2x+5$ e $s: y=-x+7$. Scrivere l’equazione della retta passante per il punto di intersezione di r ed s e parallela alla retta di equazione $y=1/2x+2$.

FUNZIONE QUADRATICA

Una funzione del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ ed $a \neq 0$
È detta funzione quadratica. Il suo grafico è una parabola generica.

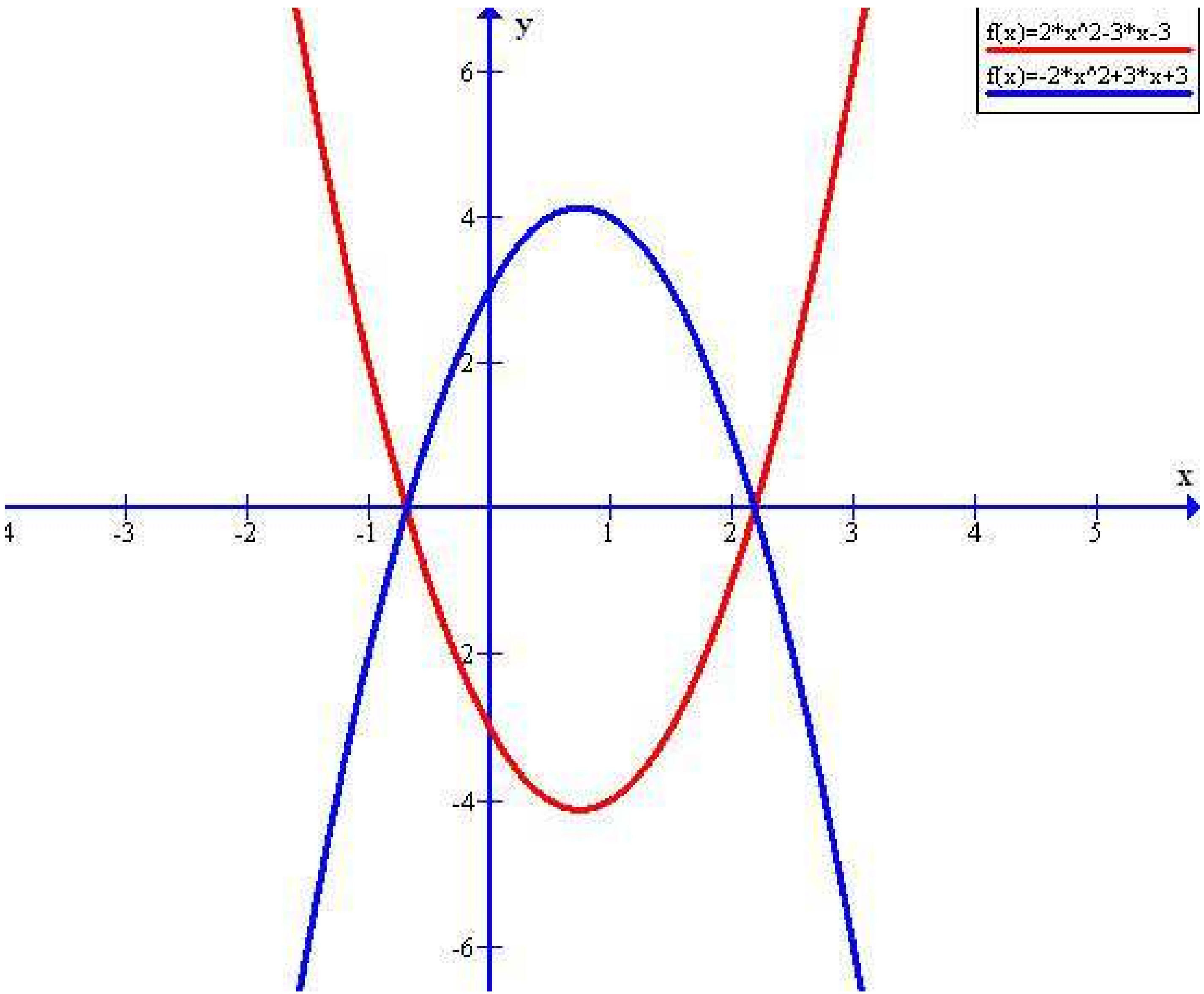
- Il grafico della parabola è simmetrico rispetto ad una retta parallela all'asse y, detto asse di simmetria, di equazione
$$x = -\frac{b}{2a}$$

- La parabola ha vertice nel punto di coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

  con $\Delta = b^2 - 4ac$

- Se $a > 0 \Rightarrow$ la parabola volge la concavità verso l'alto

- Se $a < 0 \Rightarrow$ la parabola volge la concavità verso il basso



f(x)=2*x^2-3*x-3
f(x)=-2*x^2+3*x+3
y
x
6
4
2
-2
-4
-6
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvere un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ significa risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia cercare le intersezioni tra la funzione quadratica e l'asse delle ascisse (asse x)

Tali soluzioni vengono definite RADICI o ZERI della funzione.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
(due intersezioni con l'asse x)

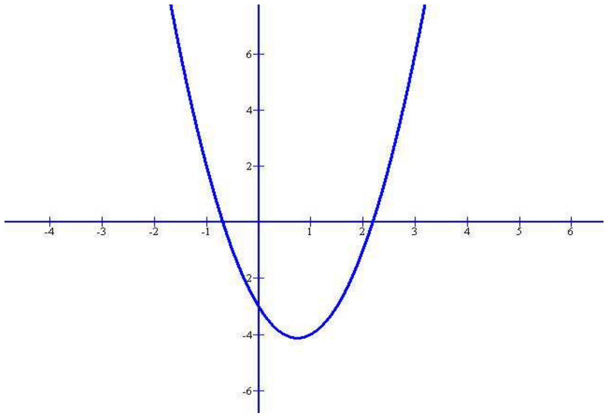
- Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
(una sola intersezione con l'asse x)

- Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'equazione non ammette soluzioni reali, ciò vuol dire che la funzione quadratica non ha intersezioni con l'asse x

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

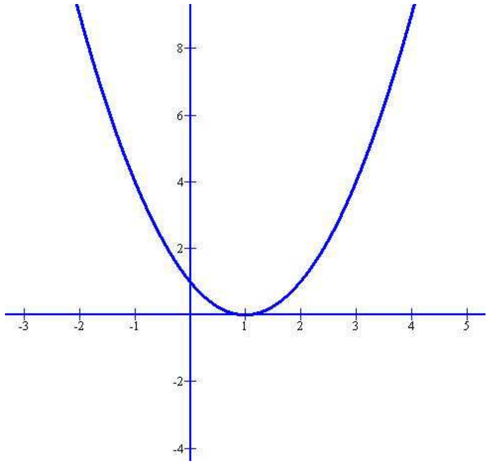
$a > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$



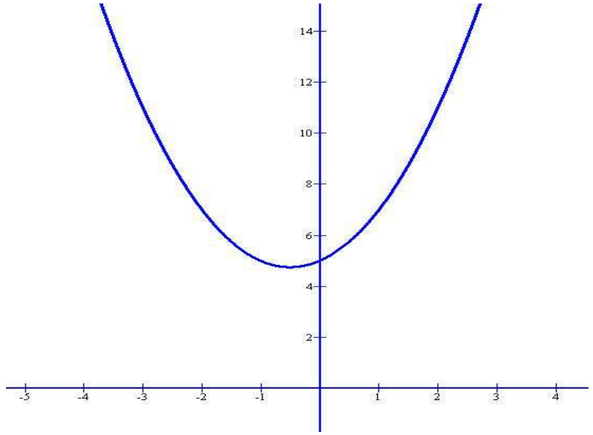
$\Delta > 0$

$x < x_1 \vee x > x_2$



$\Delta = 0$

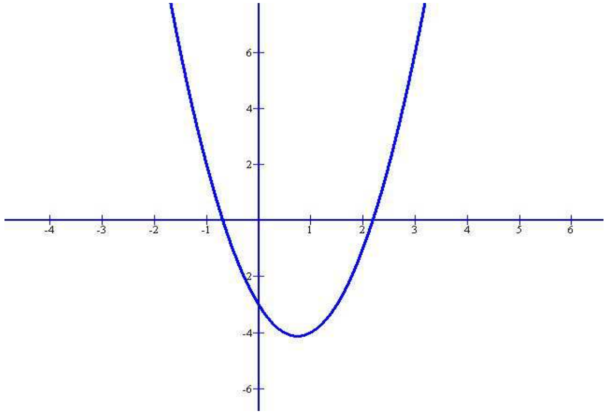
$\forall x \in R, x \neq x_1$

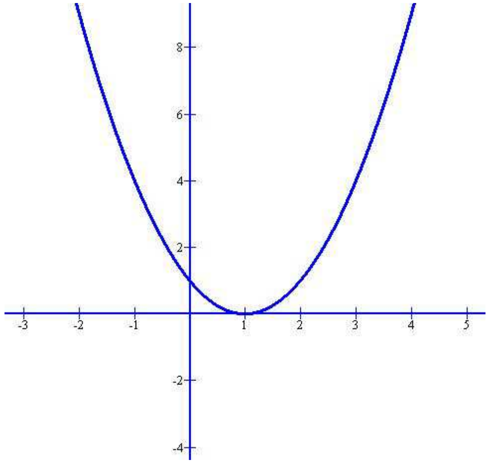


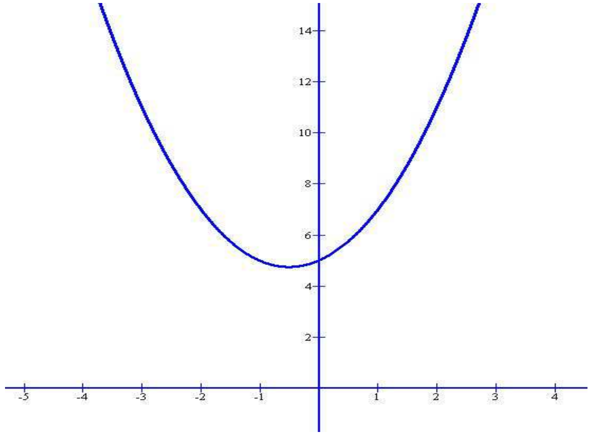
$\Delta < 0$

$\forall x \in R$

$a > 0$ $\quad ax^2 + bx + c \geq 0$



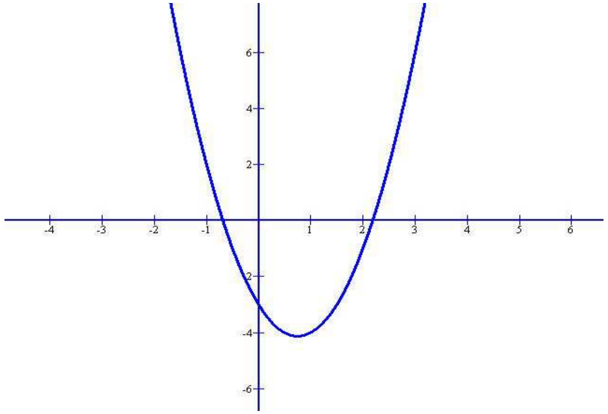


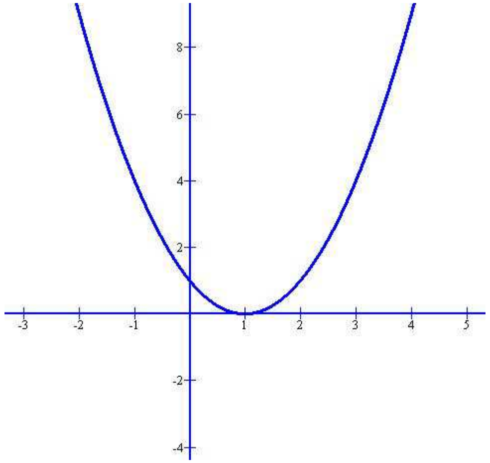


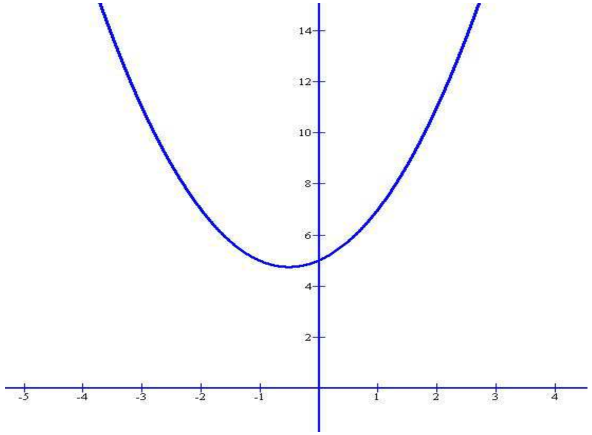
$\Delta > 0$ $\quad \Delta = 0$ $\quad \Delta < 0$

$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ $\quad \forall x \in R$ $\quad \forall x \in R$

$a > 0$ $\qquad ax^2 + bx + c < 0$



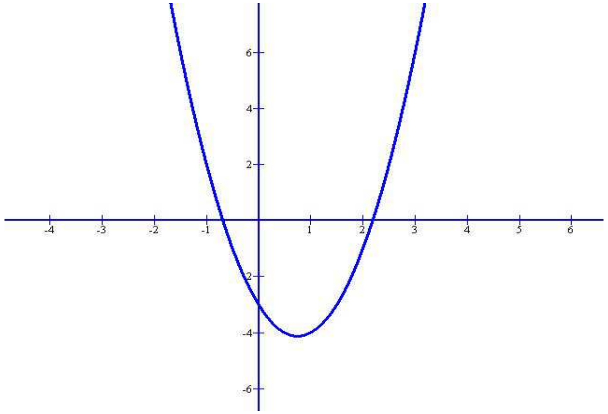


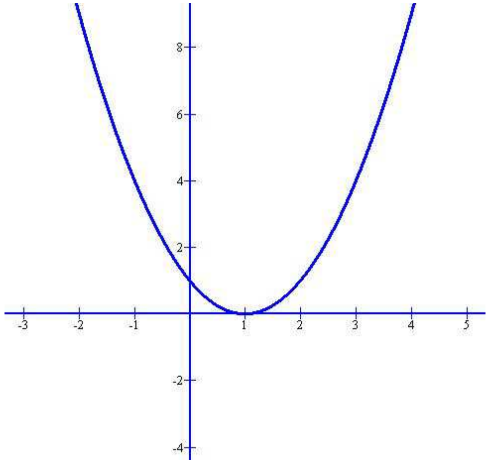


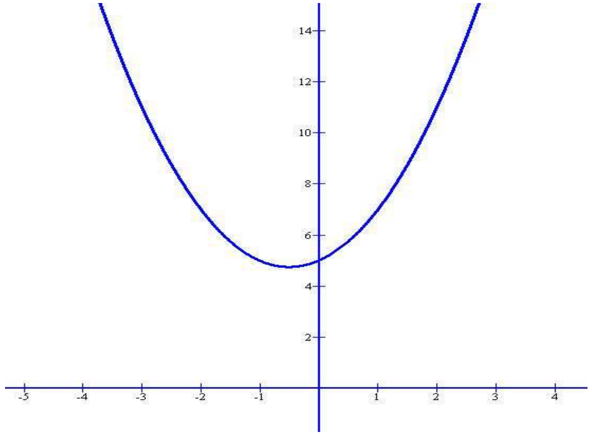
$\Delta > 0$ $\qquad \Delta = 0$ $\qquad \Delta < 0$

$x_1 < x < x_2$ $\qquad \nexists x \in R$ $\qquad \nexists x \in R$

$a > 0$ $ax^2 + bx + c \leq 0$







$\Delta > 0$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$\Delta = 0$

$x = x_1$

$\Delta < 0$

$\nexists x \in R$

DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \quad \text{o} \quad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

Si studiano il segno del numeratore e il segno del denominatore, analizzandone la positività. Si costruisce poi un grafico dei segni su cui riportare gli intervalli di positività di numeratore e denominatore. Si determina, infine, con la <u>regola dei segni</u>, il segno del rapporto N/D.

Esempio. $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4} \leq 0$ Sol: (-2;2)

Esempio. $\dfrac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 + 6x + 8} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -4) \cup (-2; +\infty)$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

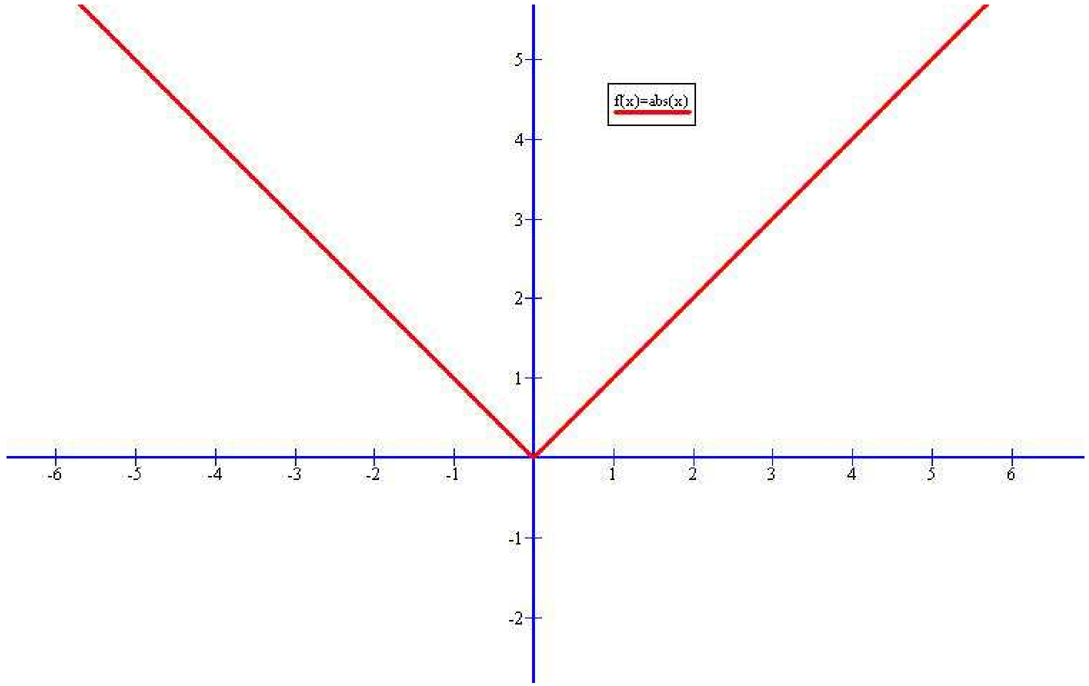
$$\begin{cases} D_1(X) > 0 \quad (< 0) \\ D_2(X) > 0 \quad (< 0) \end{cases}$$

Si determinano le soluzioni della prima disequazione, si determinano le soluzioni della seconda disequazione e si rappresentano tali soluzioni su un grafico di sistema. (Le soluzioni di una singola disequazione vanno rappresentate con una linea continua su uno stesso livello, le disequazioni dell'altra disequazione su un secondo livello). Si ricercano infine le <u>soluzioni comuni</u>, ossia quelle che soddisfano entrambe le disequazioni.

Esempio: $\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ \dfrac{5 - x}{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases}$ Sol: $(-\infty, -3) \cup (3,5]$

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$



- ✓ Dominio: R
- ✓ Codominio: [0;+∞)
- ✓ Funzione pari
- ✓ Decrescente con $x < 0$
- ✓ Crescente per $x > 0$
- ✓ $f(x)=0$ per $x = 0$

Proprietà del valore assoluto:

- $|-x| = |x| \qquad \forall x \in R$
- $|x|^2 = x^2 \qquad \forall x \in R$
- $\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in R$
- $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in R$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \forall x, y \in R$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad \forall x, y \in R, y \neq 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y \qquad \forall x, y \in R$

EQUAZIONI SEMPLICI CON I MODULI

$$|f(x)| = k$$

$K < 0$	impossibile
$K > 0$	$f(x) = -k \vee f(x) = k$
$K = 0$	$f(x) = 0$

$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$

Esempio. $|x + 5| = 6$ Sol: $x = -11 \vee x = 1$

Esempio. $|x^2 - 2x| = 3x$ Sol: $x = 0 \vee x = 5$

DISEQUAZIONI SEMPLICI CON I MODULI

$$|f(x)| < k$$

K < 0	impossibile
K > 0	$-k < f(x) < k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$
K = 0	impossibile

$$|x^2 + 5x + 6| \leq 2$$
$$-4 \leq x \leq -1$$

$$|f(x)| > k$$

K < 0	sempre vera nel dominio di f
K > 0	$f(x) < -k \vee f(x) > k$
K = 0	sempre vera nel dominio di f con f non nulla

$$|x^2 - 2x| > 3$$
$$x < -1 \vee x > 3$$

Esempio: $|2x+1| \leq x+4$ $\qquad -\frac{5}{3} \leq x \leq 3$ $\qquad$ si applica la definizione

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

n dispari

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = [g(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) > [g(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) < [g(x)]^n$$

n pari

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 & \textit{superflua} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 & \textit{superflua} \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

Esempi.

- ✓ $\sqrt{3x+6}+x=4$ Sol:1
- ✓ $3+\sqrt{x^2-1}<2x^2$ Sol: $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$
- ✓ $\sqrt{x^2-2x}>x-1$ Sol: $x \leq 0$

PROPRIETA’ DELLE POTENZE

Considero a > 0

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

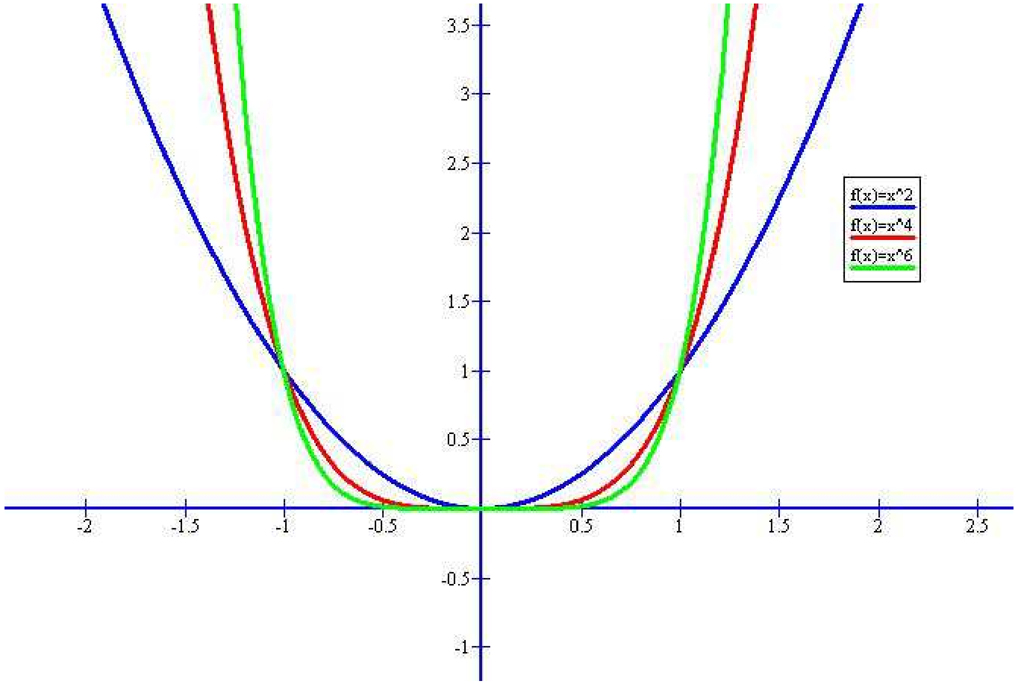
FUNZIONE POTENZA

Una funzione potenza è definita come una funzione del tipo

$$f(x) = ax^{\alpha} \text{ con } a \neq 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha > 0$

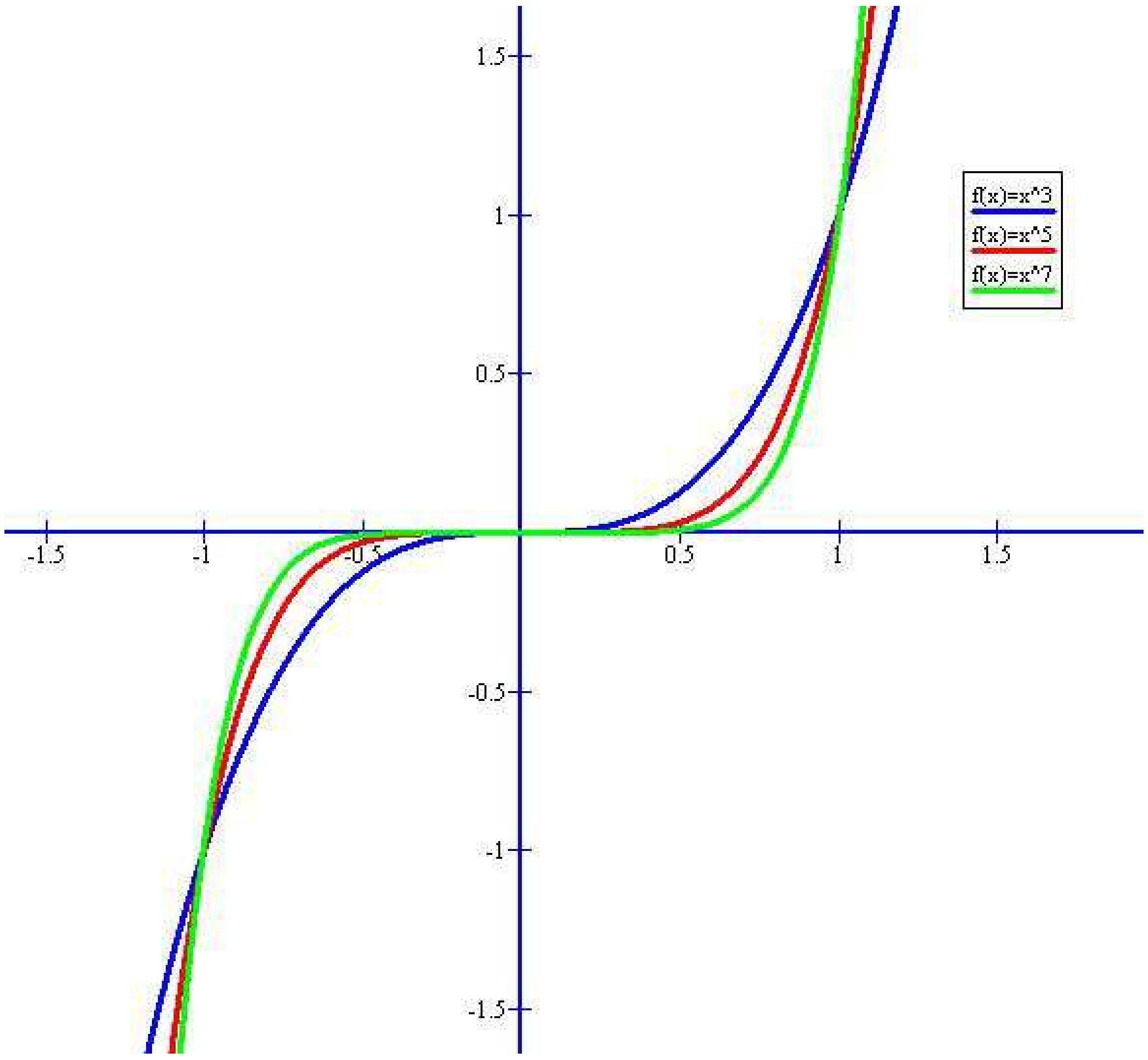
α pari $\Rightarrow$



- ✓ Dominio: R
- ✓ Codominio: [0;+∞)
- ✓ Funzione pari
- ✓ Funzione decrescente per x < 0 e crescente per x >0
- ✓ Funzione non invertibile in quanto non iniettiva
- ✓ f(x) > 0 $\forall x \in \mathbb{R}$
- ✓ f(x) = 0 con x = 0

α dispari $\Rightarrow$

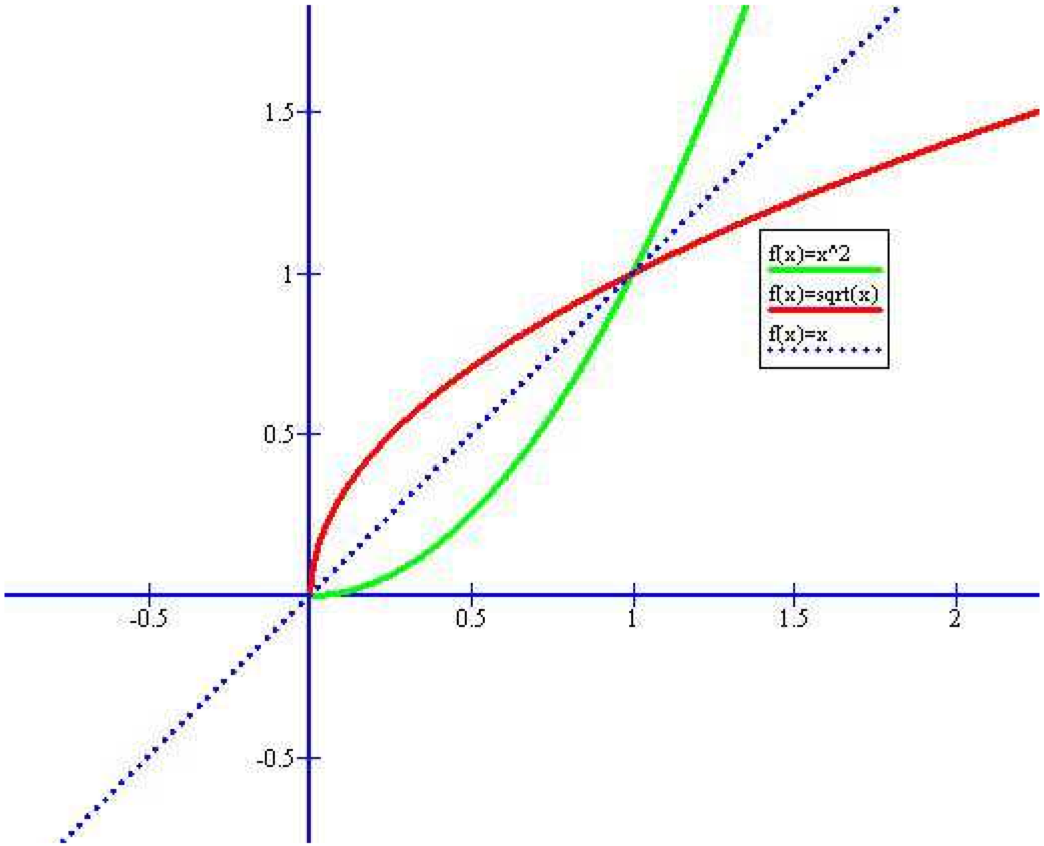
- ✓ Dominio: R
- ✓ Codominio: R
- ✓ Funzione dispari
- ✓ Funzione monotona crescente in senso stretto
- ✓ Funzione invertibile
- ✓ f(x) > 0 per x > 0 e f(x) < 0 per x < 0
- ✓ f(x) = 0 con x = 0



$$\alpha = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

n pari $\Rightarrow$

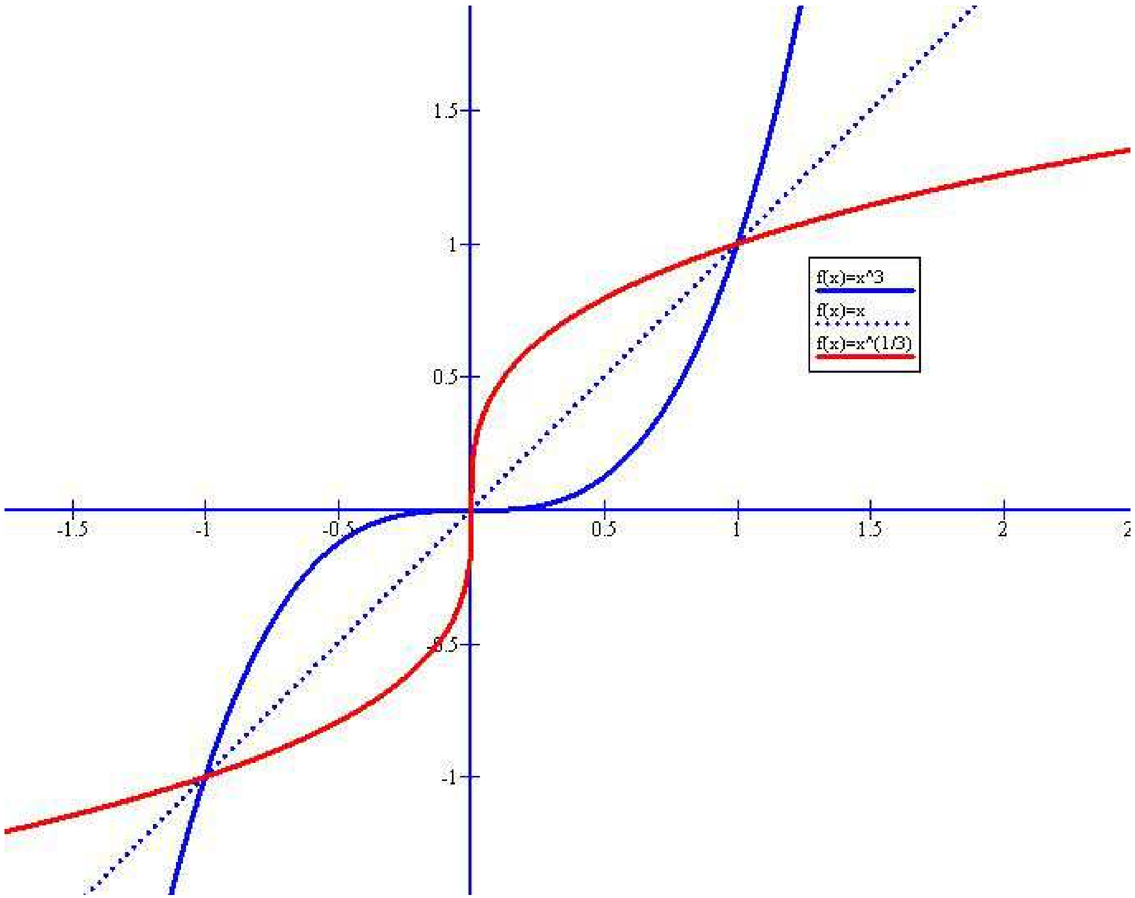
- ✓Dominio: [0;+∞)
- ✓Codominio: [0;+∞)
- ✓è l'inversa della funzione $y = x^n$ ristretta all'intervallo in cui $x \geq 0$



$$\alpha = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

n dispari $\Rightarrow$

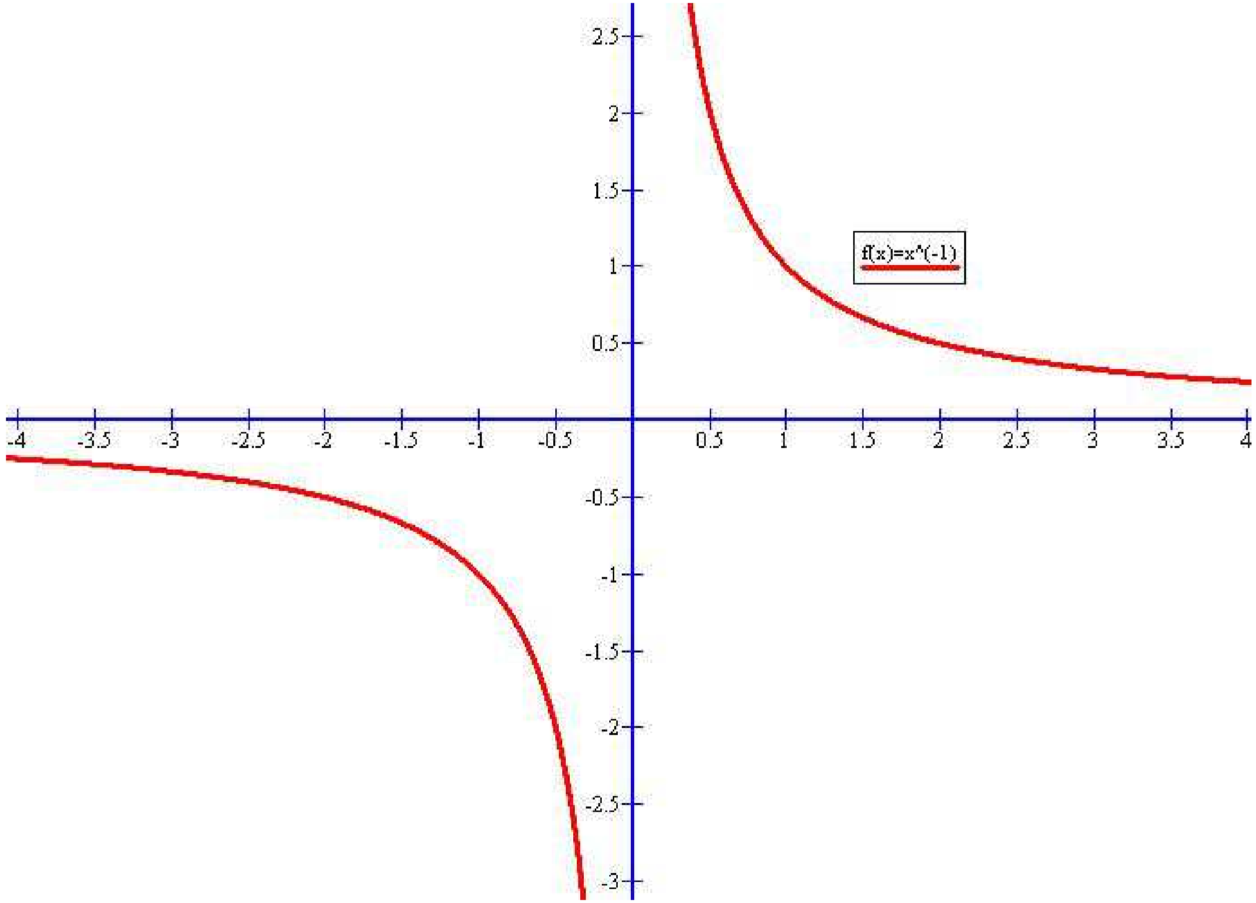
- ✓ esiste $\forall x \in R$
- ✓ è l'inversa della funzione $y = x^n$, con n dispari



$$f(x) = x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

Caso particolare: $\alpha = 1$

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



iperbole equilatera
riferita agli asintoti
L'origine è centro di simmetria. Funzione dispari.

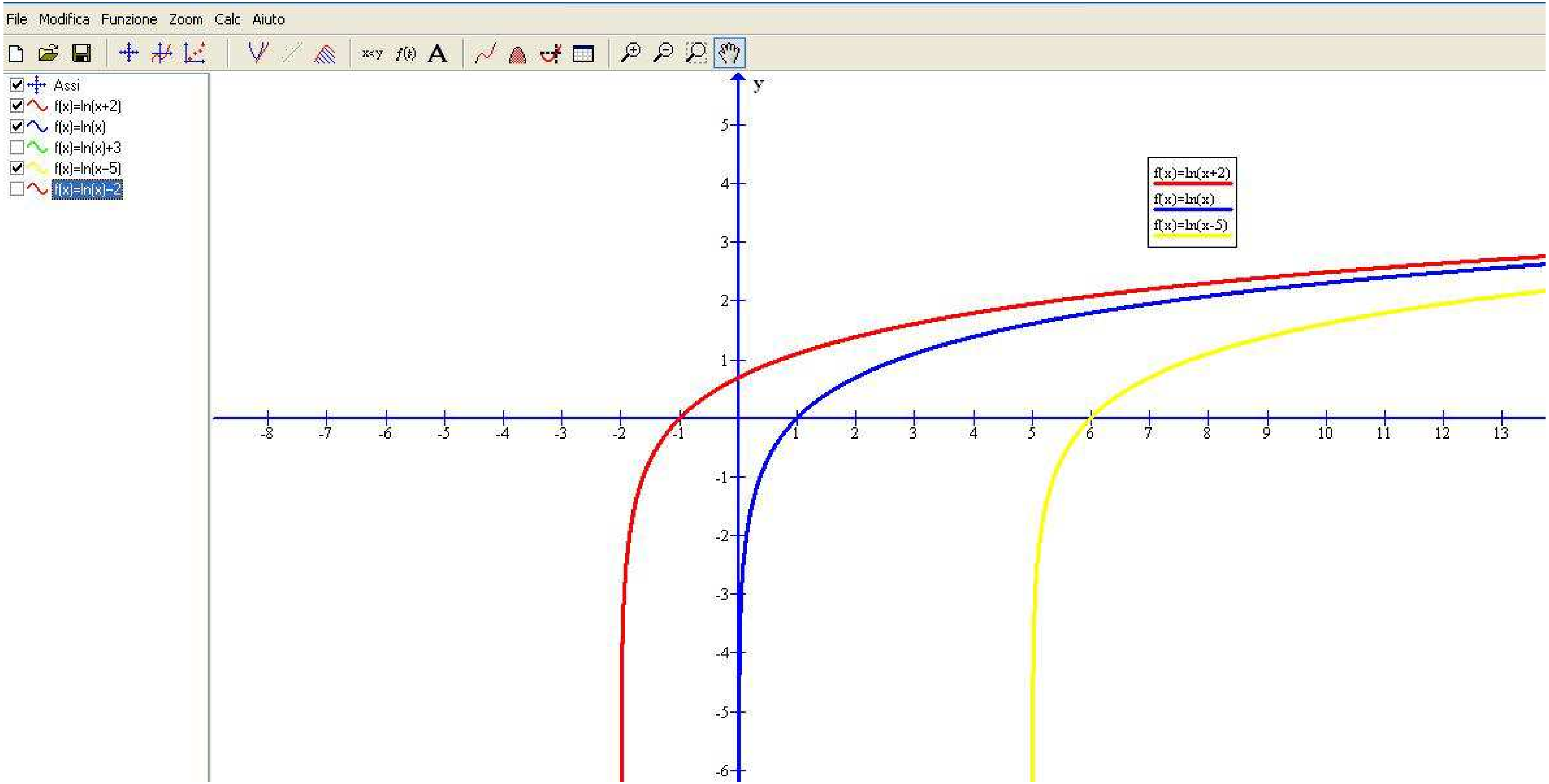
Due grandezze x e y si definiscono **inversamente proporzionali** se e solo se il loro prodotto è costante, se e solo se $xy = k$

ALCUNE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
TRASLAZIONI

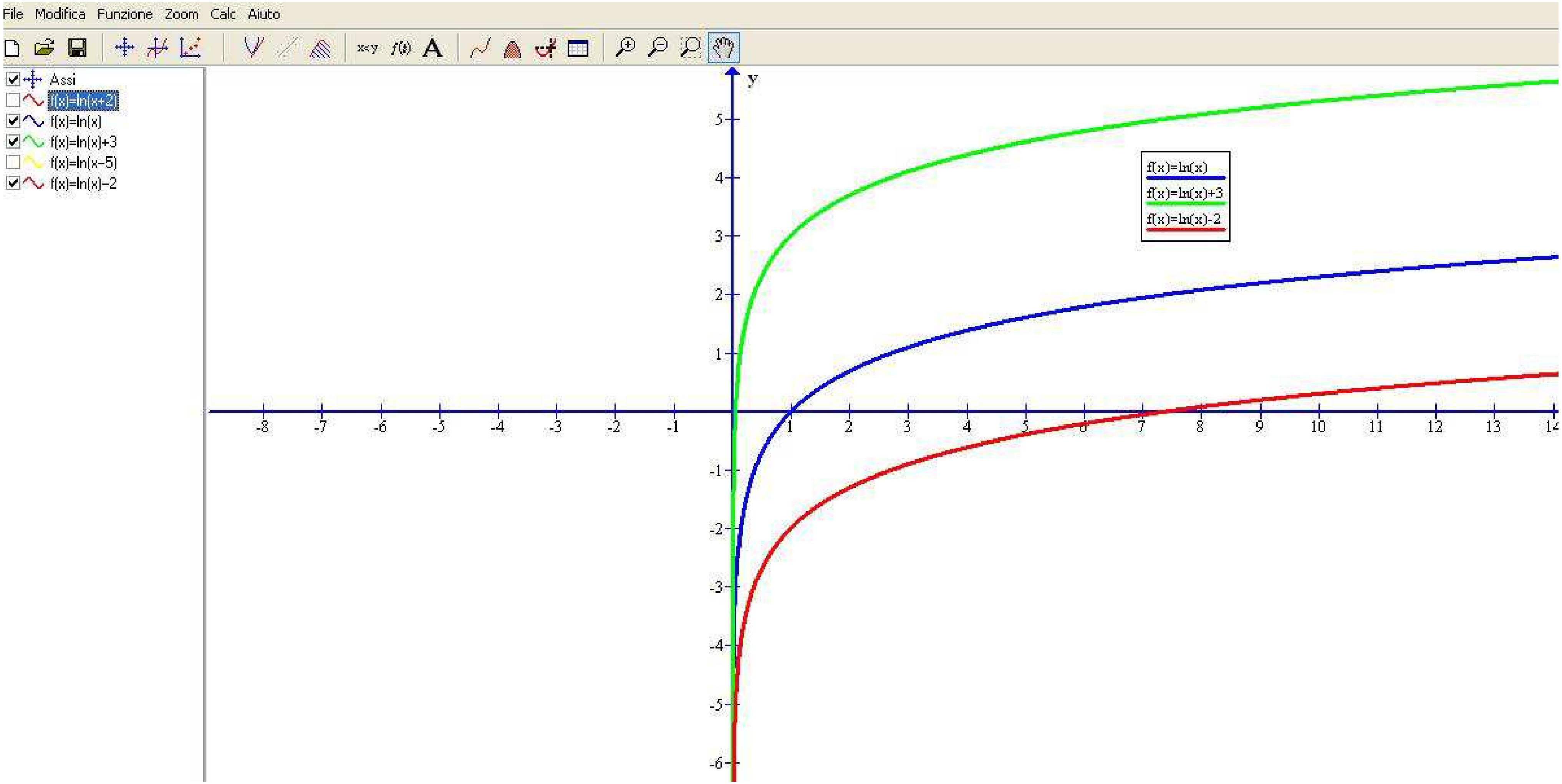
(verranno ridefinite successivamente mediante i vettori per gli studenti di STB)

$y = f(x+k)$ con $k > 0$	Traslazione a sinistra di una quantità k
$y = f(x+k)$ con $k < 0$	Traslazione a destra di una quantità k
$y = f(x) + h$ con $h > 0$	Traslazione verso l'alto di una quantità h
$y = f(x) + h$ con $h < 0$	Traslazione verso il basso di una quantità h

Grafici con programma Graph



Grafici con programma Graph



Applicando una traslazione orizzontale e una traslazione verticale alla funzione xy = h si ottiene una nuova funzione detta funzione omografica.

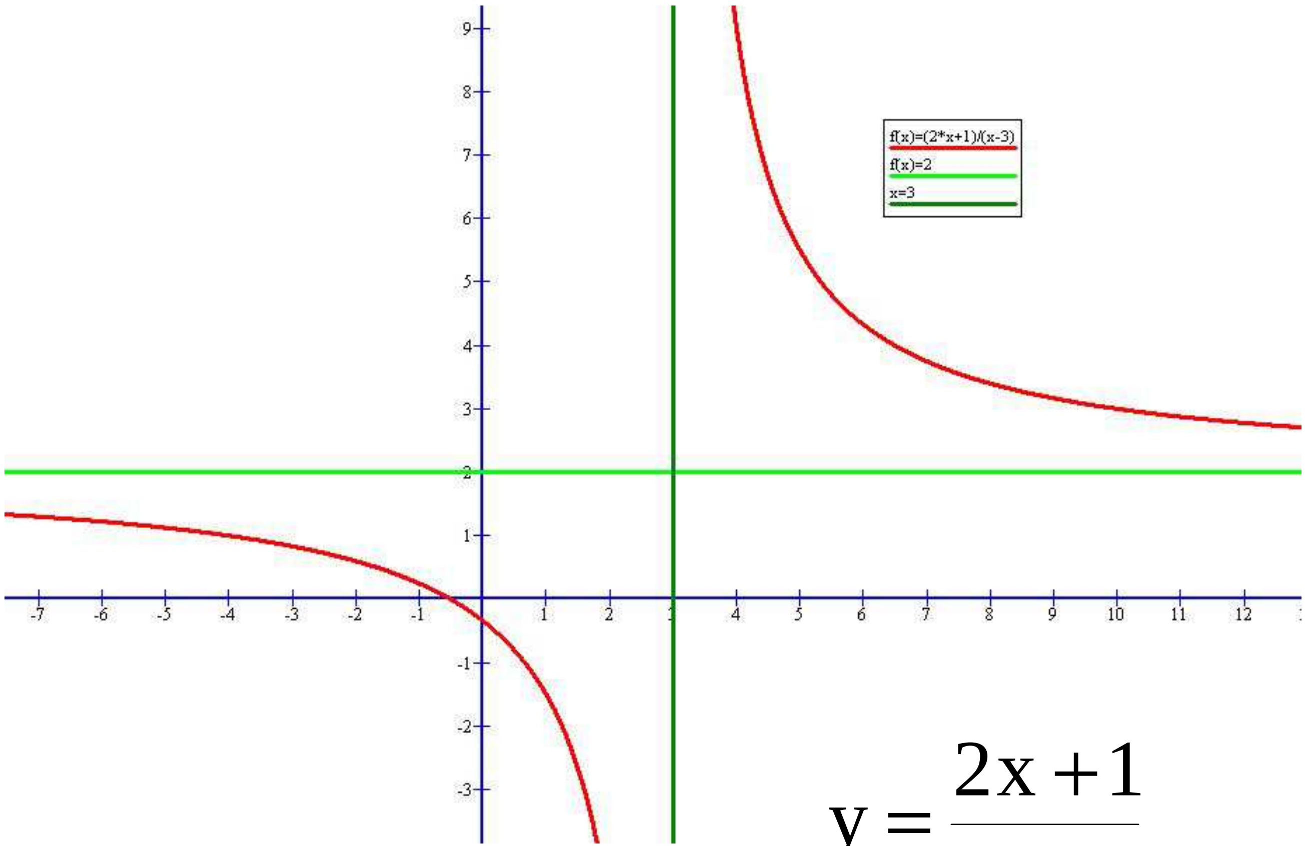
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con

$$c \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0$$

Asintoti: $x = -\dfrac{d}{c}$

$$y = \frac{a}{c}$$



$$y = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Disegnare il grafico di una funzione omografica:

- Dominio
- Studio del segno
- Intersezioni con gli assi
- Ricerca di eventuali simmetrie (simmetrica rispetto al punto O' $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$)
- Asintoti

Analisi grafica di dominio e codominio.

Una retta si definisce <u>asintoto</u> per una curva se e solo se, al tendere dell'ascissa e/o dell'ordinata di un punto qualunque della curva all'infinito, la distanza tra il punto e la retta tende a zero.