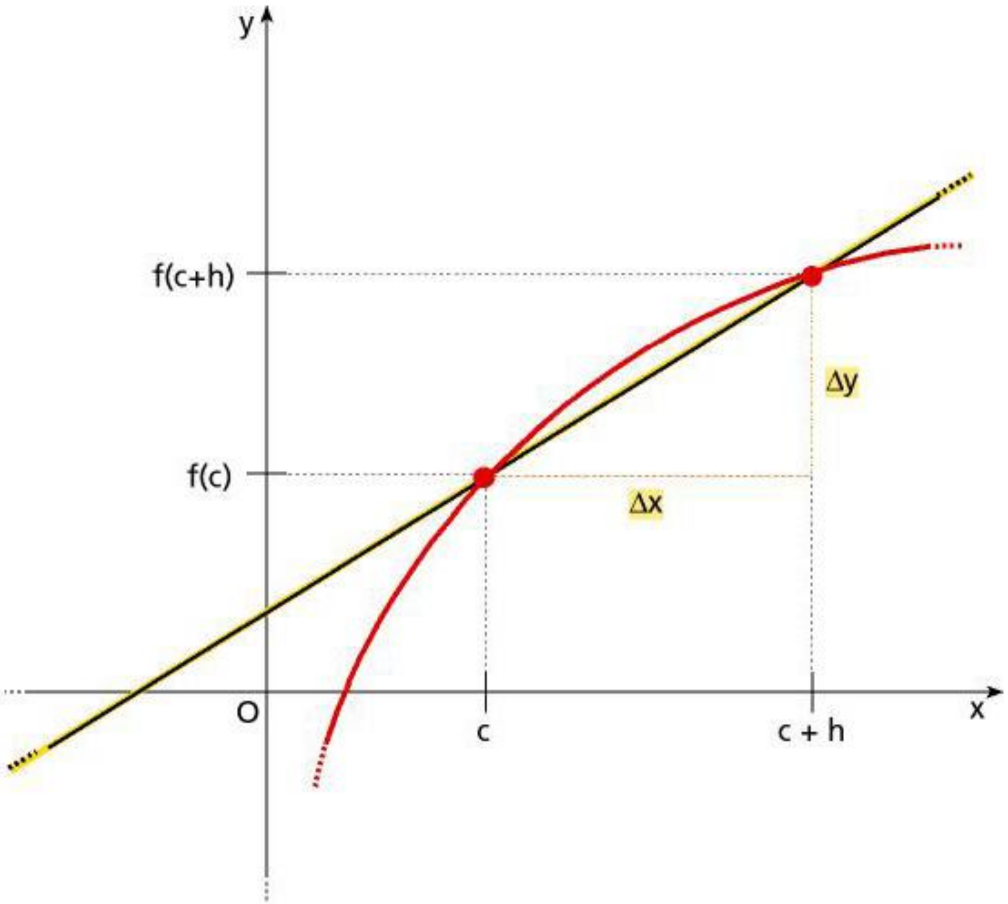
DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO
SIGNIFICATO GEOMETRICO. EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO DI TANGENZA.
REGOLE DI DERIVAZIONE. CONTINUITA' E DERIVABILITA'
PUNTI DI NON DERIVABILITA'

A $(x_1,y_1) = (c, f(c))$
B$(x_2,y_2) = (c+h, f(c+h))$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$$

dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse valutato in senso antiorario.

RAPPORTO INCREMENTALE o TASSO DI VARIAZIONE



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Esso prende il nome di **rapporto incrementale**, in quanto è il rapporto tra l'incremento della variabile dipendente e quello della variabile indipendente.
- Il rapporto incrementale corrisponde al **coefficiente angolare della retta secante la curva nei due punti A e B**
- Esprime il **tasso di variazione** della funzione relativo all'intervallo [c,c+h]
- E' un **tasso di crescita** se è positivo, un **tasso di decrescita** se negativo
- Si può interpretare anche come **velocità media di variazione** della funzione nell'intervallo assegnato
- Se la funzione è una retta esso è costante, altrimenti varia, al variare dell'intervallo

Esempio. Il tasso di crescita di una popolazione malthusiana è un rapporto incrementale:

$$n - m = \frac{N(t) - N(t-1)}{N(t-1)}$$

Esempio. Velocità media di un corpo. La velocità media è rappresentata dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato per percorrerlo, indipendentemente dalla legge oraria considerata.

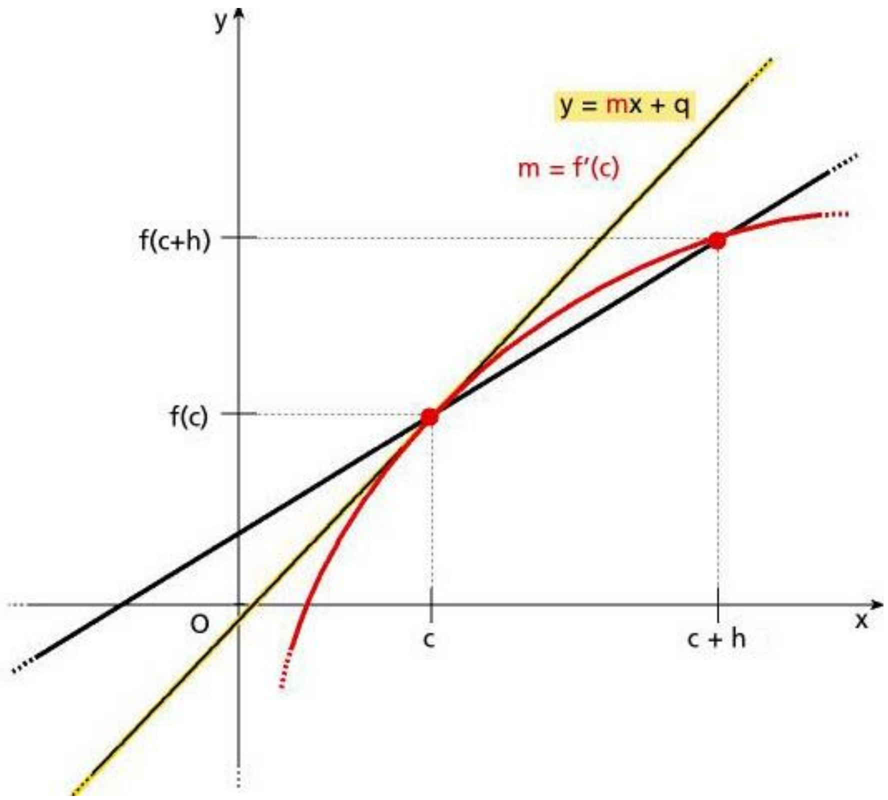
$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

E' interessante valutare anche la velocità istantanea di un corpo.

Esempio. Controllo della velocità: tutor in autostrada e autovelox.

- Tutor misura la velocità media: $v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
- L'autovelox misura la velocità istantanea, ossia una velocità media con l'intervallo di tempo $\Delta t \to 0$

$$v_{istantanea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Data una funzione $y = f(x)$, il limite del rapporto incrementale,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

se esiste ed è finito

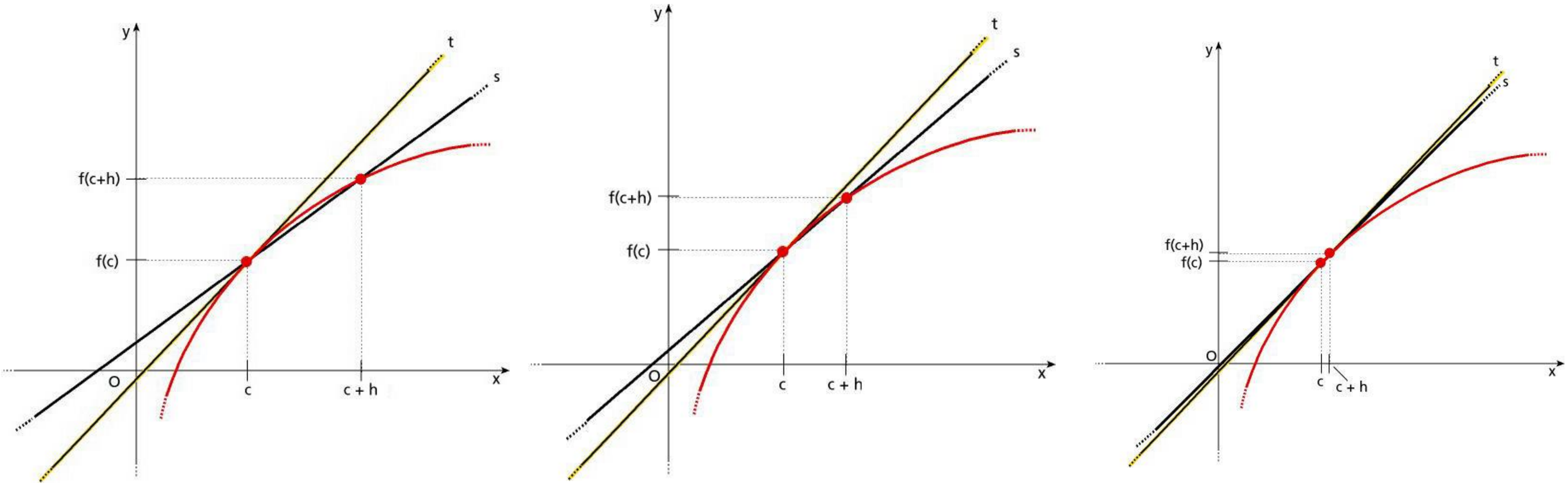
si chiama derivata della funzione nel punto c e si indica con il simbolo $f'(c)$ o $\frac{df}{dx}(c)$

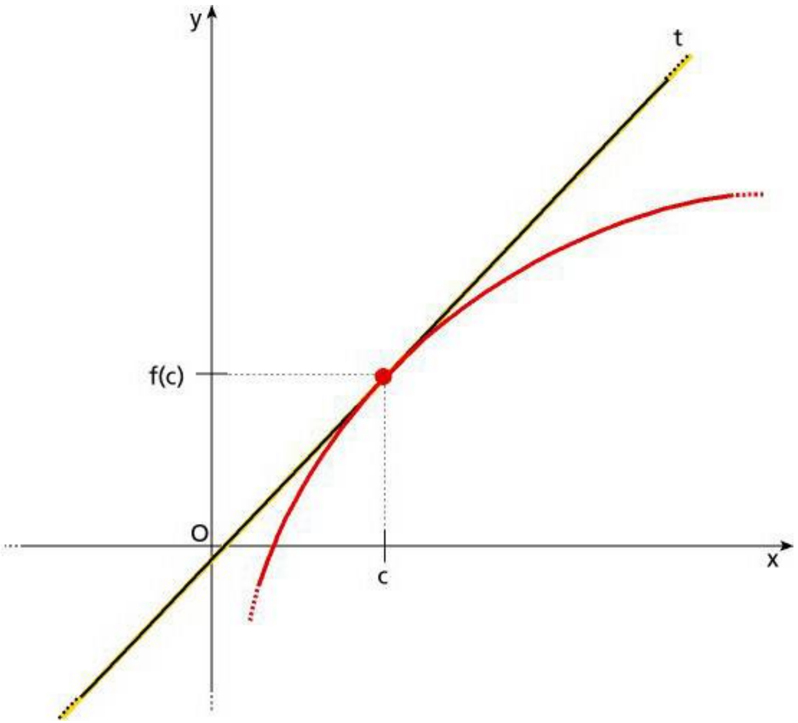
Esempio. Accelerazione media e accelerazione istantanea. (8.1.7)

Significato geometrico di derivata

Il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta secante la curva nei due punti A e B. Quando però $\Delta x \rightarrow 0$, il punto B di coordinate $B \equiv (c+h, f(c+h))$ tende ad avvicinarsi al punto A di coordinate $A \equiv (c, f(c))$.

La retta secante, tende quindi a diventare tangente alla curva nel punto A.
Di conseguenze, il valore del rapporto incrementale tende e diventare il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla curva in A.





Il valore $f'(c) =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

derivata della funzione nel punto c, coincide con il **coefficiente angolare della retta tangente alla curva in c**.

Equazione della retta tangente

Ricordiamo l'equazione del fascio proprio di rette di centro un dato punto P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - f(c) = m(x - c) \qquad m = f'(c)$$

$$\Rightarrow y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Punto stazionario: Data la funzione $y = f(x)$ e un suo punto x = c, se $f'(c) = 0$ allora si dice x = c è punto stazionario, ovvero un punto a tangente orizzontale.

Derivata destra e sinistra

$$f'_{-}(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$ derivata sinistra nel punto c

$$f'_{+}(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$ derivata destra nel punto c

Una funzione si definisce **derivabile in un punto c** se esistono finite le derivate destra e sinistra e sono uguali.

Una funzione si definisce **derivabile in un intervallo chiuso** [a,b] se è derivabile in tutti i suoi punti interni e se esistono finite la derivata destra in a e la derivata sinistra in b.

Continuità e derivabilità

Teorema. Se una funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto x_0 allora in quel punto è anche continua.

Hp: $\exists$ finito $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Th: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dim.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Calcolo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri, tenendo conto del fatto che il limite della somma è la somma dei limiti, il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e il limite di una costante è la costante stessa.

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h$$

Ricordiamo l'ipotesi:

$$\exists \textit{ finito } \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$

(*) $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$

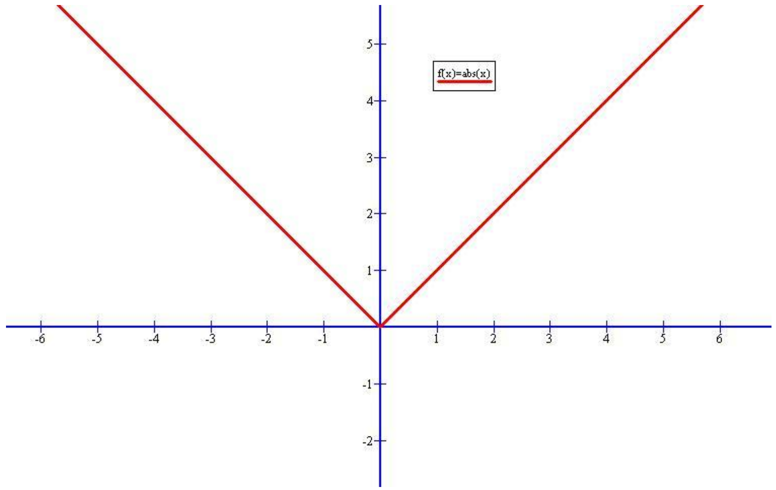
Pongo $x_0 + h = x$ se $h \to 0 \Rightarrow x \to x_0$

Sostituendo nella (*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè la funzione è continua in x_0.

Attenzione: Non vale il viceversa!!!! Il teorema non si può invertire!!
E' cioè possibile trovare funzioni continue in un punto, ma non derivabili in tale punto.

Controesempio. La funzione valore assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Proviamo che in x = 0 è continua, ma non derivabile.

1) $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$$

Pertanto possiamo affermare che è continua in x = 0

2) Valutiamo ora la derivata destra e la derivata sinistra:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

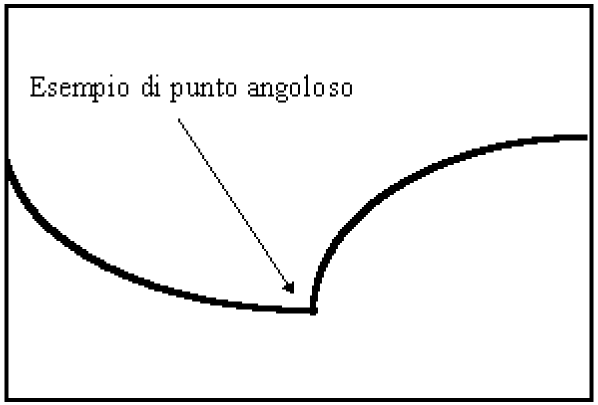
Pertanto la derivata destra e la derivata sinistra in x = 0 esistono finite, ma sono diverse, la funzione non è derivabile in x = 0 e si dice che essa ha in x = 0 un punto angoloso.

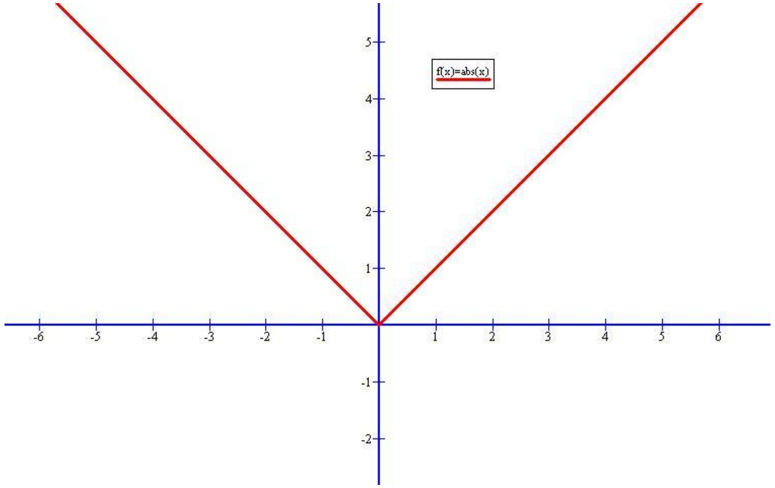
Punti di non derivabilità

Punti angolosi

E' un punto in cui la derivata destra e la derivata sinistra esistono finite,o **almeno una delle due è finita**, ma sono diverse. In questo caso la curva nel punto ha due tangenti con pendenza diversa.

$$f'_{-}(c) \neq f'_{+}(c)$$



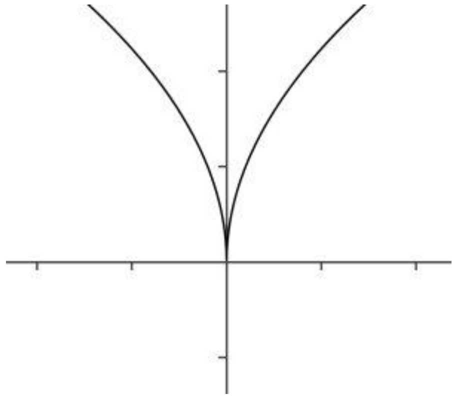


Cuspidi

Un punto di cuspide è un punto in cui la derivata destra e la derivata sinistra sono infinite, ma con segno diverso.

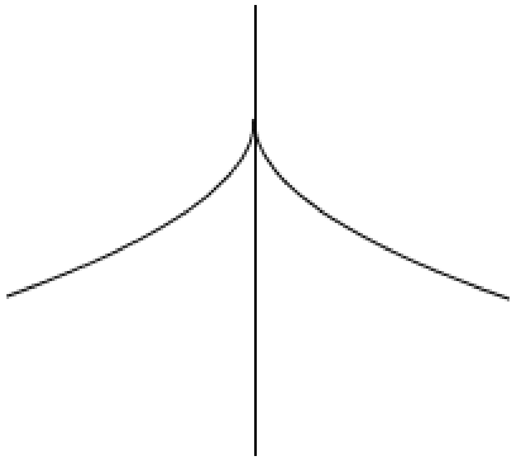
Cuspide verso il basso:

$$f'_-(c) = -\infty \qquad f'_+(c) = +\infty$$



Cuspide verso l’alto:

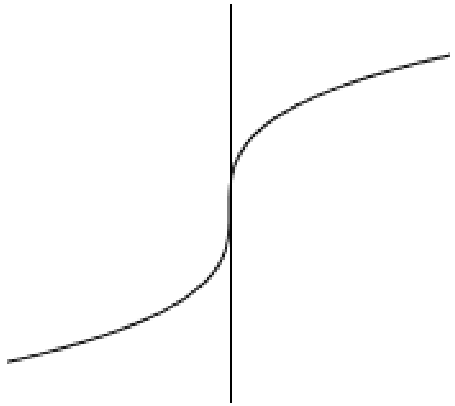
$$f'_-(c) = +\infty \qquad f'_+(c) = -\infty$$



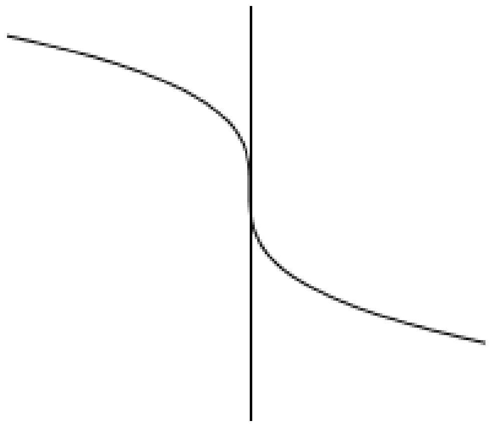
Flessi a tangente verticale

Un punto di flesso a tangente verticale è un punto in cui la derivata destra e la derivata sinistra sono infinite con lo stesso segno. In questo caso la retta tangente alla curva esiste ed è una retta parallela all’asse y di equazione x = c.

$$f'_-(c) = +\infty \qquad f'_+(c) = +\infty$$



$$f'_-(c) = -\infty \qquad f'_+(c) = -\infty$$



Funzione derivata: $f'(x) : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

- ✓ $D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$
- ✓ $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- ✓ $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- ✓ $D[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
- ✓ $D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
- ✓ $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivate fondamentali

(dim. svolte in aula)

- ✓ $D(k) = 0$
- ✓ $D(x) = 1$
- ✓ $D(\operatorname{sen}x) = \cos x$ $\qquad D(\cos x) = -\operatorname{sen}x$
- ✓ $D(a^x) = a^x \ln a$ $\qquad D(e^x) = e^x$
- ✓ $D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ $\qquad D(\ln x) = \frac{1}{x}$
- ✓ $D(\operatorname{tg}x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $\qquad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ✓ $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ✓ $D(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{1+x^2}$

Derivata della funzione inversa

Teorema. Sia $y = f(x)$ definita e invertibile in un intervallo I e sia $x = f^{-1}(y)$ la sua inversa. Se $y = f(x)$ è derivabile in ogni punto di I, con derivata diversa da zero, allora anche $x = f^{-1}(y)$ è derivabile e vale la relazione:

$$D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Applicazioni

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$D(\mathrm{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivata della funzione composta

Teorema. Se la funzione g è derivabile nel punto x e la funzione f è derivabile in $z = g(x)$, allora la funzione composta $y = f(g(x))$ è derivabile in x e la sua derivata è il prodotto delle derivate di f rispetto a z e di g rispetto a x.

$$D[f(g(x))] = f'(z) \cdot g'(x) = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{con } z = g(x)$$

Esempio. $y = (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^4$ in tal caso

$$z = g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1 \qquad y = f(z) = z^4$$

$$Dy = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 4z^3 \cdot z' = 4(2x^3 - 3x^2 + x - 1)^3 \cdot (6x^2 - 6x + 1)$$

Esempio. $y = \ln \operatorname{sen}(x^4 - 2) \qquad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x^4 - 2)} \cdot \cos(x^4 - 2) \cdot 4x^3$

Esempio. $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\sqrt{3x}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\sqrt{3x}}} \cdot \frac{1}{1+3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3}{4(1+3x)\sqrt{3x \operatorname{arctg}\sqrt{3x}}}$$

Esempio. $y = 4 \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{4+4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)} = 2\sqrt{4-x^2}$$

Derivate di ordine superiore al primo

Data la funzione $y = f(x)$, la sua derivata $y' = f'(x)$ è una funzione della variabile x, della quale a sua volta è possibile calcolare la derivata. Tale derivata prende il nome di derivata seconda $y'' = f''(x)$. In modo analogo si definisce la derivata terza, come la derivata della derivata seconda e così via.
La derivata di una funzione è anche detta derivata prima.

Esempio. $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$

$y' = 3x^2 - 3$ $\qquad$ $y'' = 6x$ $\qquad$ $y''' = 6$ $\qquad$ $y^{(4)} = 0$

Derivate di funzioni definite per casi o contenente valori assoluti

$$f(x) = |\ln\sqrt{x}|$$

Determino il dominio della funzione

C.E. $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$ $\qquad D =]0, +\infty[$

Poi valuto il segno **<u>dell'argomento del modulo</u>**

$$\ln\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \\ \ln\sqrt{x} \geq \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x > 0 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Si deduce che l'**argomento** è

$$\ln\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\ln\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Posso quindi scrivere la funzione per casi:

$$f(x) = |\ln\sqrt{x}| = \begin{cases} \ln\sqrt{x} & x \geq 1 \\ -\ln\sqrt{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Determino ora la funzione derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x} & x > 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2x} & 0 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & x > 1 \\ -\dfrac{1}{2x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Attenzione!!!!!! Devo inizialmente escludere gli estremi, in quanto va controllato se in essi la funzione derivata esiste oppure no e pertanto vanno eventualmente esclusi dal dominio di derivabilità.

Cosa succede in x = 1 ?

Valutiamo la derivata destra e la derivata sinistra. Se esse risultano diverse o non esistono o sono infinite, allora la funzione iniziale y = f(x) non risulta derivabile in x = 1 e dunque tale punto va escluso dal dominio di derivabilità.

$f'_{+}(1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $f'_{-}(1) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$ finite

Pertanto la funzione in x = 1 non è derivabile e presenta un **punto angoloso**

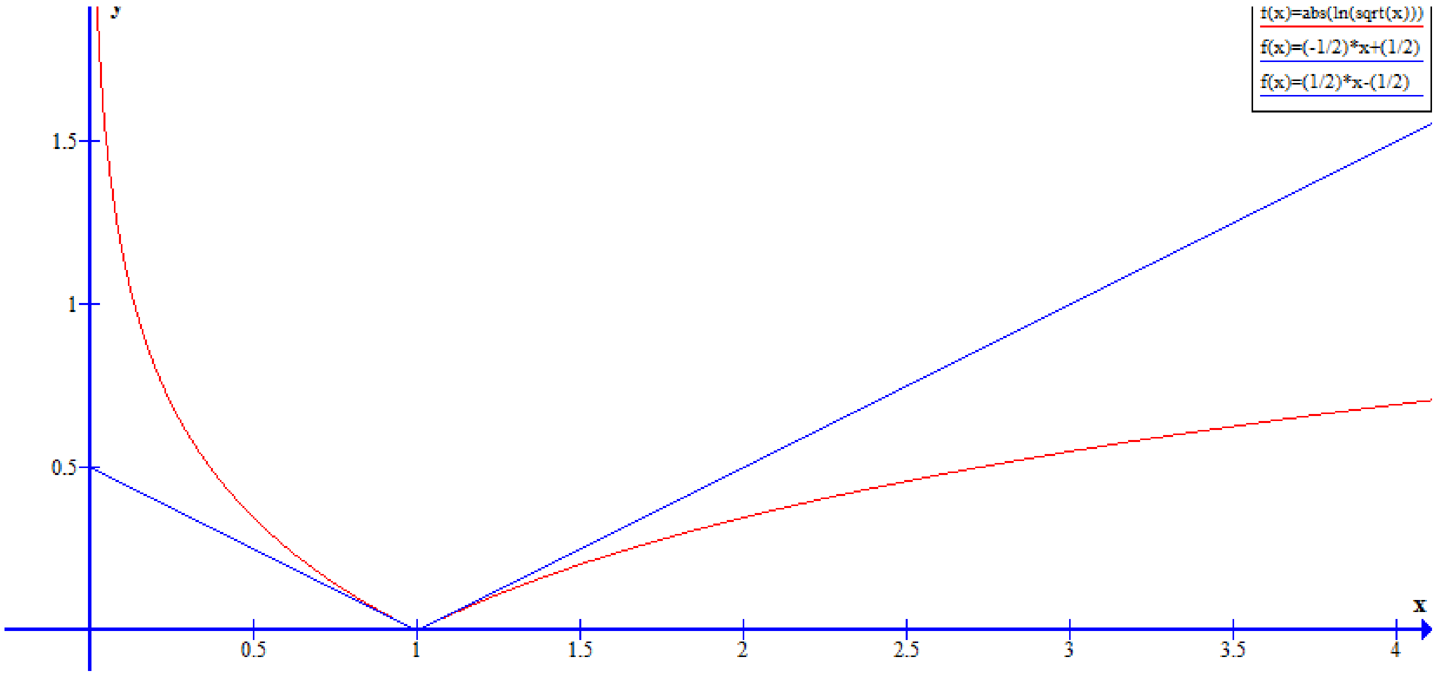
$D' =]0,1[\cup]1,+\infty[$ dominio di derivabilità

Si osserva che $D' \subset D$

Determiniamo le due semirette tangenti in x = 1

$$f(1) = |\ln\sqrt{1}| = 0 \qquad \Rightarrow P(1;0) \qquad \Rightarrow y - 0 = m(x-1)$$

$$f'_+(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow t_+ : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad f'_-(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_- : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



Esercizi.

- Determina la funzione derivata delle seguenti funzioni contenente moduli.

$$y = |x^2 - 6x| \qquad\qquad y = xe^{|x|} \qquad\qquad y = \ln(|x-1|-1)$$

- Determina l'equazione della retta tangente alla curva $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ nel suo punto di intersezione con l'asse y. [y = - x + 1]

- Determina i coefficienti dell'equazione $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{4x+d}$ sapendo che il grafico corrispondente passa per il punto $\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$, nell'origine ha per tangente la retta $y = 2x$ ed inoltre si ha che $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f(x) = \infty$

- Determina i punti di discontinuità e di non derivabilità delle seguenti funzioni e indicane il tipo.

$$f(x)=\begin{cases} e^{|x|} & x<1 \\ \dfrac{1-x}{x-2} & x\geq 1 \end{cases}$$

[x=1 punto di discontinuità I specie; x=0 punto angoloso; x=2 p. disc. II specie]

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$$

[x=0 cuspide; x=1 flesso a tangente verticale]

- Trova a e b, in modo che la funzione sia continua e derivabile in tutto R

$$f(x)=\begin{cases} a\cos^2 x + b\,\mathrm{sen}\,x & x<0 \\ -\dfrac{2}{x+1} & x\geq 0 \end{cases}$$

[a= -2, b = 2]

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2+3} & x\leq 1 \\ b\ln x + (2a+1)x & x>1 \end{cases}$$

[a =1, b = - 5/2]