MODELLO DI MALTHUS.
DESTINO FINALE DI UNA POPOLAZIONE MALTHUSIANA.
MODELLO LOGISTICO ED EQUILIBRIO LOGISTICO.

Angela Donatiello

Con il termine popolazione si indica un qualsiasi insieme di organismi distinti. I modelli matematici che spiegano e prevedono l'evoluzione nel tempo del numero di individui che compongono una popolazione sono detti modelli di dinamica delle popolazioni.

Thomas **Malthus** nel 1798 studia con modelli matematici l'evoluzione di una popolazione. Il modello di Malthus si basa su tre presupposti:

1) l'ambiente fornisce costantemente tutte le risorse utili agli individui, le risorse sono illimitate;
2) la popolazione è isolata: si entra solo per nascita, si esce solo per morte;
3) ogni individuo ha la stessa capacità di riprodursi e la stessa possibilità di morire degli altri

Naturalmente tale modello è molto distante dalla realtà e comunque con ipotesi molto restrittive, ciò nonostante permette di studiare l'evoluzione di alcune popolazioni che si sviluppano secondo questo modello, come ad esempio le popolazioni umane nelle prime fasi di colonizzazione di un nuovo ambiente. Grazie al fatto che la specie umana evidenzia la capacità di elaborare strategie sempre più sofisticate per procurarsi nuove risorse, essa rappresenta una popolazione che ancora mostra un andamento di tipo malthusiano.

Dalle ipotesi fatte, nel modello malthusiano è ragionevole dedurre che una popolazione con un numero doppio di individui, si riproduca esattamente del doppio, pertanto il numero di nati per unità di tempo è direttamente proporzionale al numero di individui. Analogamente il numero di morti per unità di tempo è direttamente proporzionale alla numerosità.

Data l'ipotesi 1 (condizioni ambientali costanti e risorse illimitate)

$$\text{tasso di natalità} = \text{n} = \frac{\#\text{nati} / \text{unitàtempo}}{\text{unità } \textit{popolazione}} = \text{cos tan te}$$

$$\text{tasso di mortalità} = \text{m} = \frac{\#\text{morti} / \text{unitàtempo}}{\text{unità } \textit{popolazione}} = \text{cos tan te}$$

Sia N_0 la numerosità iniziale, ossia la popolazione al tempo t = 0.

$N_1 = N_0 + nN_0 - mN_0$ alla popolazione iniziale si sommano il numero di nati e si sottraggono il numero di morti.

$$N_1 = N_0 + nN_0 - mN_0 = (1 + n - m)N_0 = RN_0$$ con $R = 1 + n - m \geq 0$

Allora $N_2 = N_1 + nN_1 - mN_1 = (1 + n - m)N_1 = RN_1 = R^2 N_0$

In genere, al tempo t,

$$N_t = N_{t-1} + nN_{t-1} - mN_{t-1} = (1 + n - m)N_{t-1} = RN_{t-1} = R^t N_0$$

Ossia
$$N(t) = N_t = R^t N_0$$

Tale andamento è di tipo esponenziale.

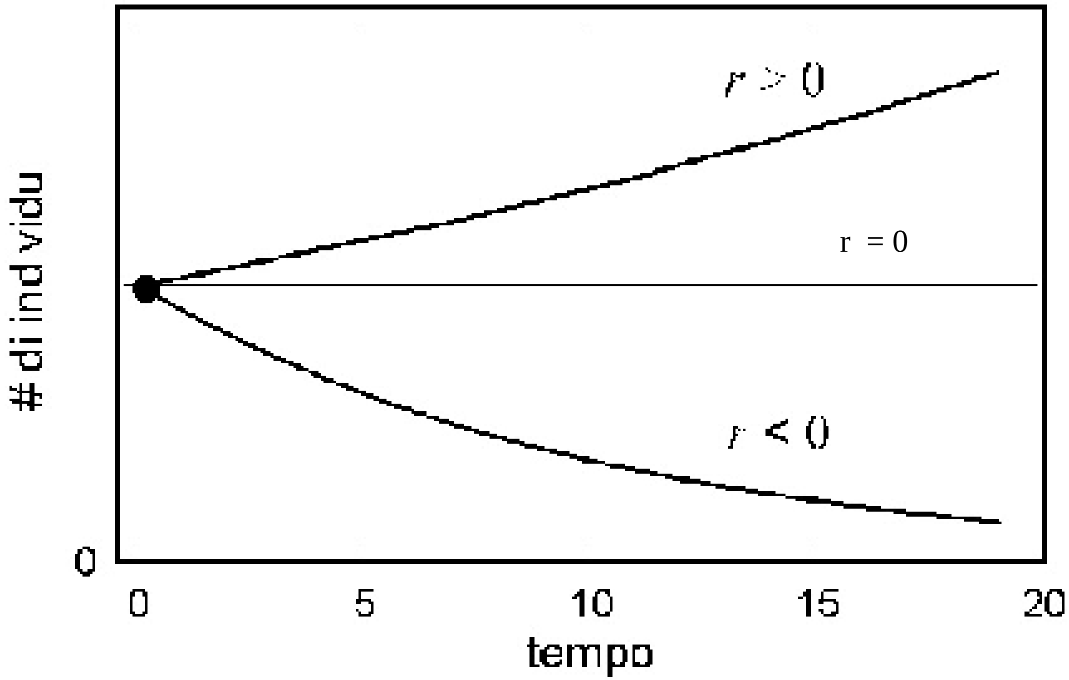
Indichiamo con $n - m$ il tasso di crescita per unità di popolazione

$$n - m = \frac{N(t) - N(t-1)}{N(t-1)}$$

Se $n - m > 0 \Rightarrow R > 1 \Rightarrow \ N(t) = N_t = R^t N_0$ funzione crescente

Se $n - m < 0 \Rightarrow R < 1 \Rightarrow \quad N(t) = N_t = R^t N_0$ funzione decrescente

Se il tasso di natalità supera il tasso di mortalità, la popolazione cresce esponenzialmente, se invece il tasso di mortalità supera quello di natalità, allora la popolazione tenderà all’estinzione.



Valutiamo infatti il comportamento della funzione $N(t) = N_t = R^t N_0$ al tendere del tempo t all'infinito, sia con R > 1 sia con 0 < R < 1.

- ✓ $n - m > 0 \Rightarrow R > 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} R^t N_0 = +\infty$ il destino finale della popolazione è l'**<u>esplosione demografica</u>**
- ✓ $n - m < 0 \Rightarrow 0 < R < 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} R^t N_0 = 0$ il destino finale della popolazione è l'**<u>estinzione</u>**

- ✓ $n - m = 0 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow N(t) = N_0$ la popolazione mantiene lo stesso valore iniziale, **<u>la popolazione è in equilibrio</u>**.

Modello logistico

Il modello di Malthus si basa sull'ipotesi che le risorse siano illimitate, pertanto i tassi specifici di nascita e morte siano costanti. Ciò non avviene nelle popolazioni reali, in quanto le risorse non sono affatto illimitate.

La crescita esponenziale della numerosità di una popolazione, come ipotizzata dal modello di Malthus, viene ostacolata dalla scarsità delle risorse. Tale scarsità di risorse mette in atto fenomeni competitivi detti di **competizione intraspecifica**, cioè tra organismi della stessa specie, che possono ostacolare ulteriormente lo sviluppo della popolazione stessa.

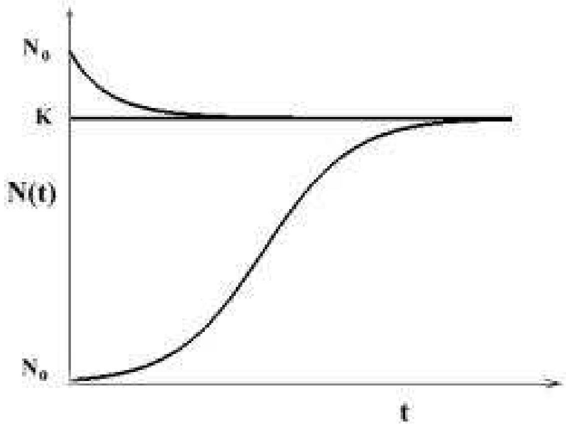
Esistono alcune popolazioni la cui riproduzione è fortemente condizionata dalla quantità di risorse.

La **Drosophila melanogaster**, più nota come moscerino della frutta, ha una riproduzione variabile a seconda delle risorse e del nutrimento disponibili. Se il nutrimento scarseggia, diminuisce la natalità e dunque aumenta la mortalità. Il modello di Malthus non è più applicabile.

Verhulst (1804 – 1849) propose un nuovo modello, la cui funzione numerosità ha un andamento del tipo:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}}$$

dove N_0 è la numerosità iniziale, mentre α e K parametri positivi.



$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{KN_0}{N_0} = K$$

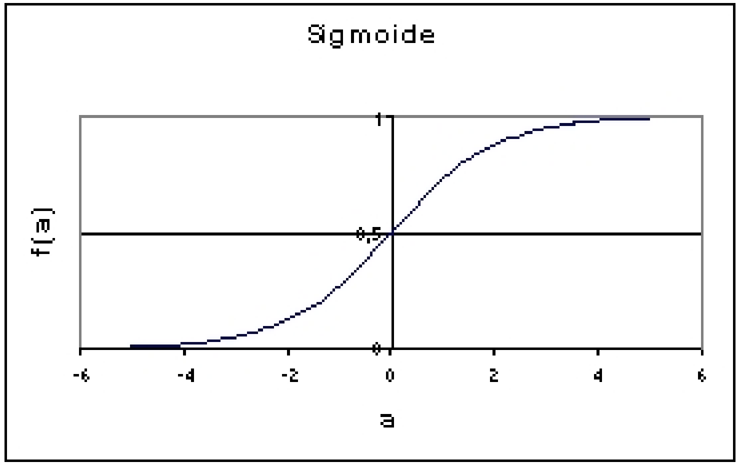
La numerosità tende ad assumere sempre lo stesso valore K che rappresenta il **<u>numero massimo di individui della popolazione che, a lungo termine, l'ambiente e le risorse possono sostenere.</u>**

Se $N_0 > k \Rightarrow$ funzione decrescente

Se $N_0 < k \Rightarrow$ funzione crescente $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{la numerosità} \\ \text{converge a k} \\ \text{in modo monotono} \end{array} \right.$

Se $N_0 = k \Rightarrow$ popolazione in equilibrio

Si comporta come una sigmoide: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$



Esempio: Risposta di un neurone artificiale ad uno stimolo.

<u>Il comportamento asintotico del modello logistico è molto diverso da quello maltusiano, in quanto non si verifica un'esplosione della popolazione, ma la popolazione in ogni caso si stabilizza intorno ad un valore di equilibrio.</u>

Se fissiamo il valore del tempo t e facciamo variare K fino a farla tendere ad infinito (risorse illimitate), osserviamo che in tal caso il comportamento è quello del modello maltusiano.

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{K} + (1 - \frac{N_0}{K})e^{-\alpha t}}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{N_0}{\frac{N_0}{K} + (1 - \frac{N_0}{K})e^{-\alpha t}} = \frac{N_0}{e^{-\alpha t}} = N_0 e^{\alpha t}$$

Dal libro di testo: Es. 6.1.7; Es. 7.1.1; Es.7.1.6; Es. 7.2.5; Es.7.2.11; Es.7.2.4.