INFINITI ED INFINITESIMI. ASINTOTI DI UNA FUNZIONE. GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE. TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

ESERCIZI SULLA CONTINUITA' E SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITA' DI UNA FUNZIONE

DEF. Una funzione y = f(x) si dice **infinitesimo** per $x \to \alpha$ se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$

Esempi: $y = \dfrac{1}{x+2}$ infinitesimo per $x \to +\infty$

$y = x - 3$ infinitesimo per $x \to 3$

Velocità di convergenza

Se considero due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ che sono entrambe infinitesime per $x \to \alpha$, allora esse si diranno infinitesimi simultanei. E' possibile effettuare un confronto tra infinitesimi simultanei per comprendere quale delle due tende a zero più rapidamente.

✓ $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$ allora f(x) è dello stesso ordine di g(x), ossia tendono a zero con la stessa rapidità.

✓ $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora f(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x), in quanto va a zero più rapidamente di g(x)

✓ $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ allora f(x) è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g(x), ossia tende a zero meno rapidamente di g(x).

✓ Se non esiste $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora f(x) e g(x) non sono confrontabili.

Esempio

- Gli infinitesimi f(x) = sen x e g(x)= x sono dello stesso ordine, infatti vale il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

- Gli infinitesimi f(x) = ln(1+x) e g(x) = x sono dello stesso ordine, infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- L'infinitesimo f(x) = 1 - cos x è di ordine superiore rispetto all'infinitesimo g(x) = x infatti $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Come si valuta l'ordine di un infinitesimo?

Dati due infinitesimi y = f(x) e y = g(x) per $x \to \alpha$, si dice che y = f(x) è un infinitesimo di ordine n rispetto a g(x) (con n > 0), se f(x) è un infinitesimo dello stesso ordine di $g(x)^n$, ossia se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)^n} = l \neq 0, \text{finito}$

<u>Oss.</u> Di solito come infinitesimo di riferimento, o <u>infinitesimo campione</u>, è scelto

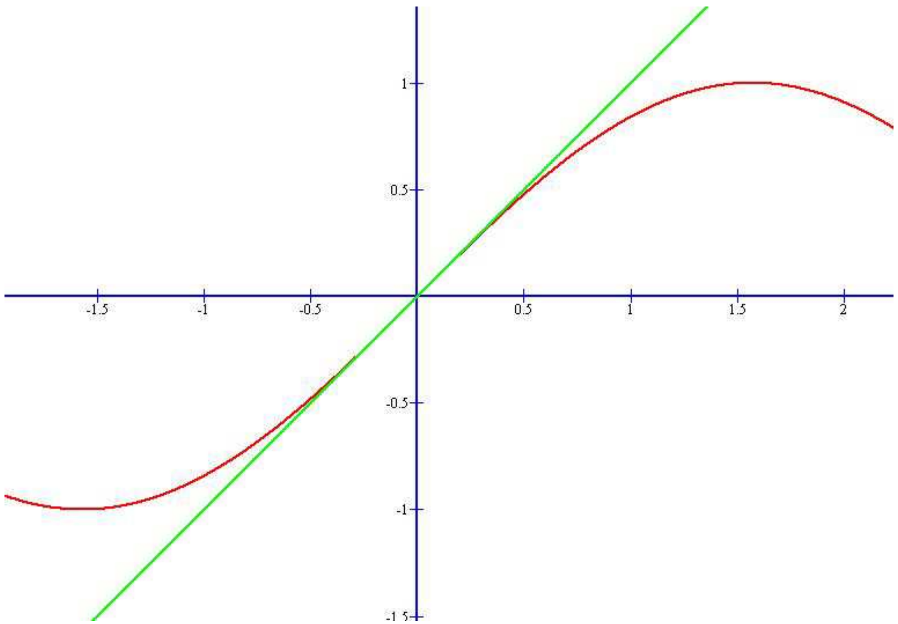
$g(x) = x - x_0$, con $x \to x_0$ oppure $g(x) = \frac{1}{x}$, con $x \to \pm\infty$

Esempio: L'infinitesimo f(x) = 1 – cos x è un infinitesimo del 2° ordine, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$ (rispetto al campione x)

Infinitesimi equivalenti

Due infinitesimi y = f(x) e y = g(x) si dicono infinitesimi equivalenti per $x \to \alpha$ se e solo se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. In tal caso si può scrivere $f(x) \sim g(x)$.



Le due funzioni sono cioè approssimabili l'una all'altra per $x \to \alpha$.

Esse possono anche essere definite asintoticamente uguali.

Nel grafico $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

Ciò permette di effettuare il calcolo del limite con il passaggio all'asintotico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$ poiché $\operatorname{sen} x \sim x$ e $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $x \to 0$

DEF. Una funzione y = f(x) si dice **infinito** per $x \to \alpha$ se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \infty$

Esempi: $y = \dfrac{1}{x+2}$ infinito per $x \to -2$

$y = x$ infinito per $x \to \pm\infty$

Velocità di divergenza

Se considero due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ che sono entrambe infiniti per $x \to \alpha$, allora esse si diranno infiniti simultanei. E' possibile effettuare un confronto tra infiniti simultanei per comprendere quale delle due tende a infinito più rapidamente.

✓ $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$ allora f(x) è dello stesso ordine di g(x), ossia tendono a infinito con la stessa rapidità.

✓ $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ allora f(x) è un infinito di ordine inferiore rispetto a g(x), in quanto va a infinito meno rapidamente di g(x)

✓ $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ allora f(x) è un infinito di ordine superiore rispetto a g(x), ossia tende a infinito più rapidamente di g(x).

✓ Se non esiste $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ allora f(x) e g(x) non sono confrontabili.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_0}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\infty & n>m\\ 0 & n<m\\ \frac{a_0}{b_0} & n=m\end{cases}$$

Se n > m allora il polinomio al numeratore è un infinito di ordine superiore rispetto al polinomio al denominatore, se n < m sarà di ordine inferiore rispetto al denominatore, se n = m saranno infiniti dello stesso ordine.

Come si valuta l'ordine di un infinito?

Dati due infiniti y = f(x) e y = g(x) per $x \to \alpha$, si dice che y = f(x) è un infinito di ordine n rispetto a g(x) (con n > 0), se f(x) è un infinito dello stesso ordine di $g(x)^n$, ossia se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)^n} = l \neq 0, \text{finito}$

<u>Oss.</u> Di solito come infinito di riferimento, o <u>infinito campione</u>, è scelto

$g(x) = x$, con $x \to \pm\infty$ oppure $g(x) = \frac{1}{x - x_0}$, con $x \to x_0$

Infiniti equivalenti

Due infiniti y = f(x) e y = g(x) si dicono infiniti equivalenti per $x \to \alpha$ se e solo se $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. In tal caso si può scrivere $f(x) \sim g(x)$.

Le due funzioni sono cioè approssimabili l'una all'altra per $x \to \alpha$.

Esse possono anche essere definite asintoticamente uguali.

Esempio

La funzione $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + 2x^3 - 1$ per $x \to +\infty$ è un infinito equivalente a $g(x) = 3x^6$.

$3x^6$ viene detta **parte principale** di f(x)

Ciò permette di effettuare il calcolo del limite con il passaggio all'asintotico.

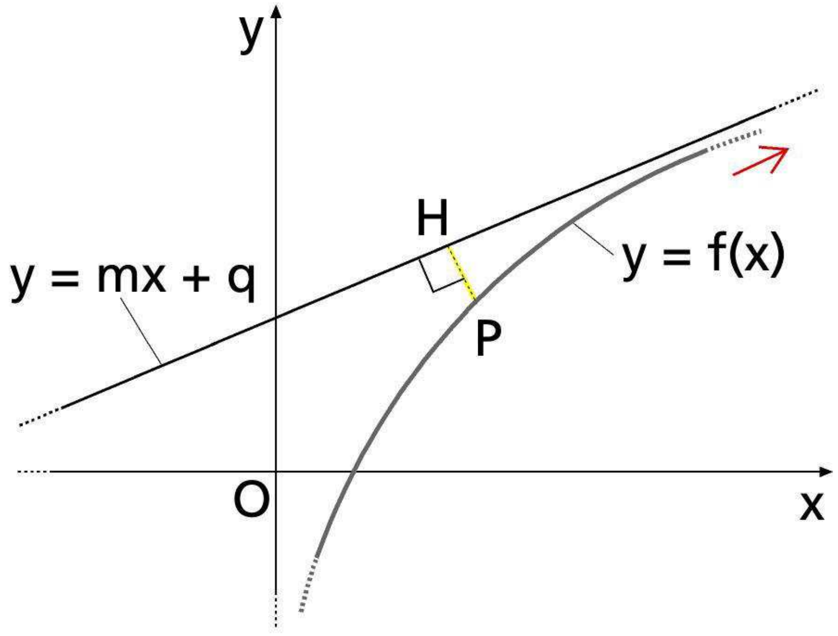
Esempio

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 3x = \pm\infty$$

Applicazione: gerarchia degli infiniti

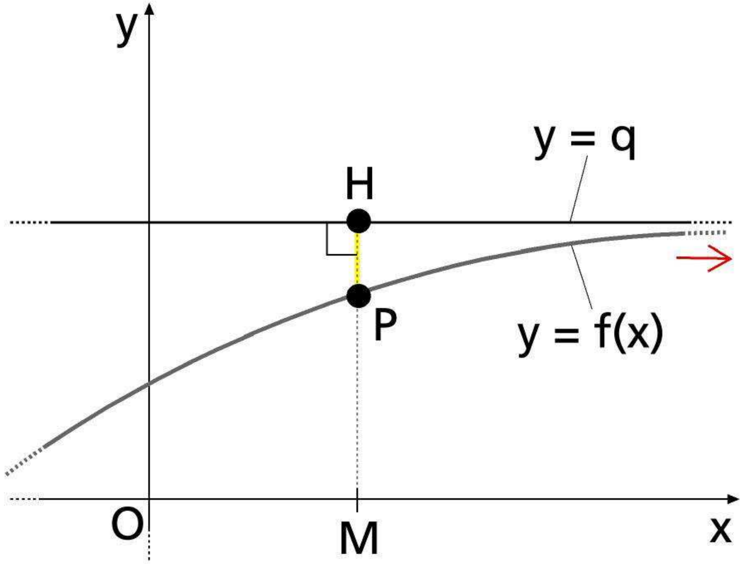
ASINTOTI DI UNA FUNZIONE

Una retta si definisce <u>asintoto</u> per una curva se e solo se, al tendere dell'ascissa e/o dell'ordinata di un punto qualunque della curva all'infinito, la distanza tra il punto e la retta tende a zero.

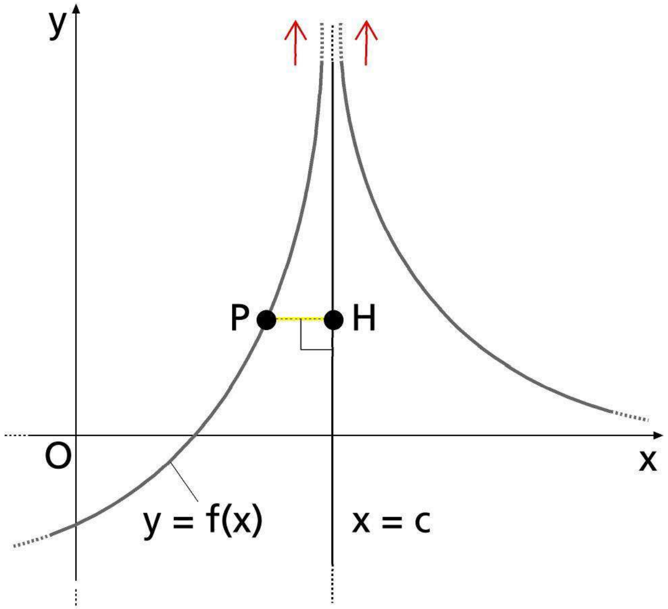


$$\lim_{\substack{x_p \to \infty \\ y_p \to \infty}} PH = 0$$

Un funzione può ammettere asintoti orizzontali, verticali, obliqui



- La funzione y = f(x) ammette un asintoto orizzontale di equazione y = q se accade che $\lim_{x \to \infty} f(x) = q$

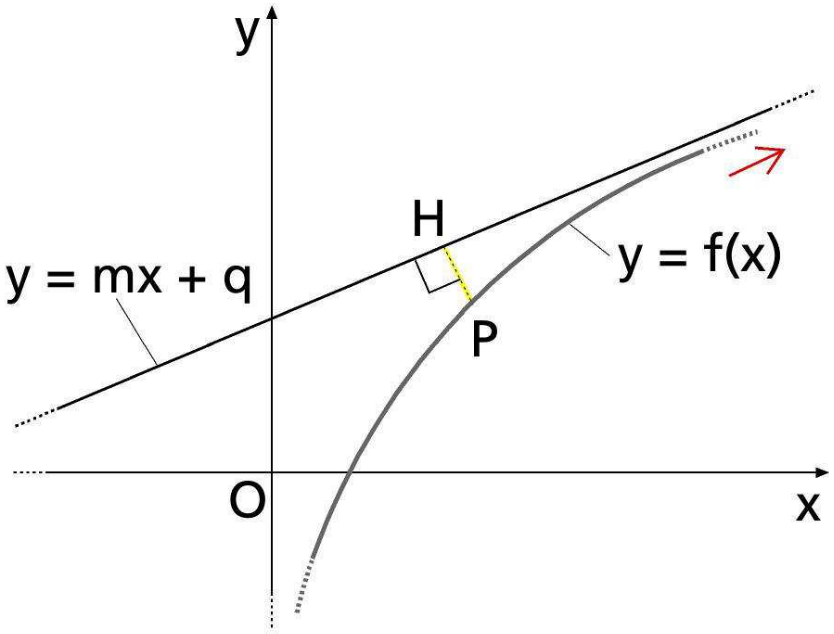


- La funzione y = f(x) ammette un asintoto verticale di equazione x = c se accade che $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

- Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$$

Allora si dice che la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per il grafico della funzione.



La funzione y = f(x) ammette pertanto un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ se accade che

- ✓ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- ✓ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \text{finito}$
- ✓ $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q, \text{finito}$

Esempi:

$$y = \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

asintoto orizzontale di equazione $y = 4$ e asintoti verticali di equazioni $x = \pm 1$

analizziamo le caratteristiche della funzione fino a costruirne il grafico probabile.

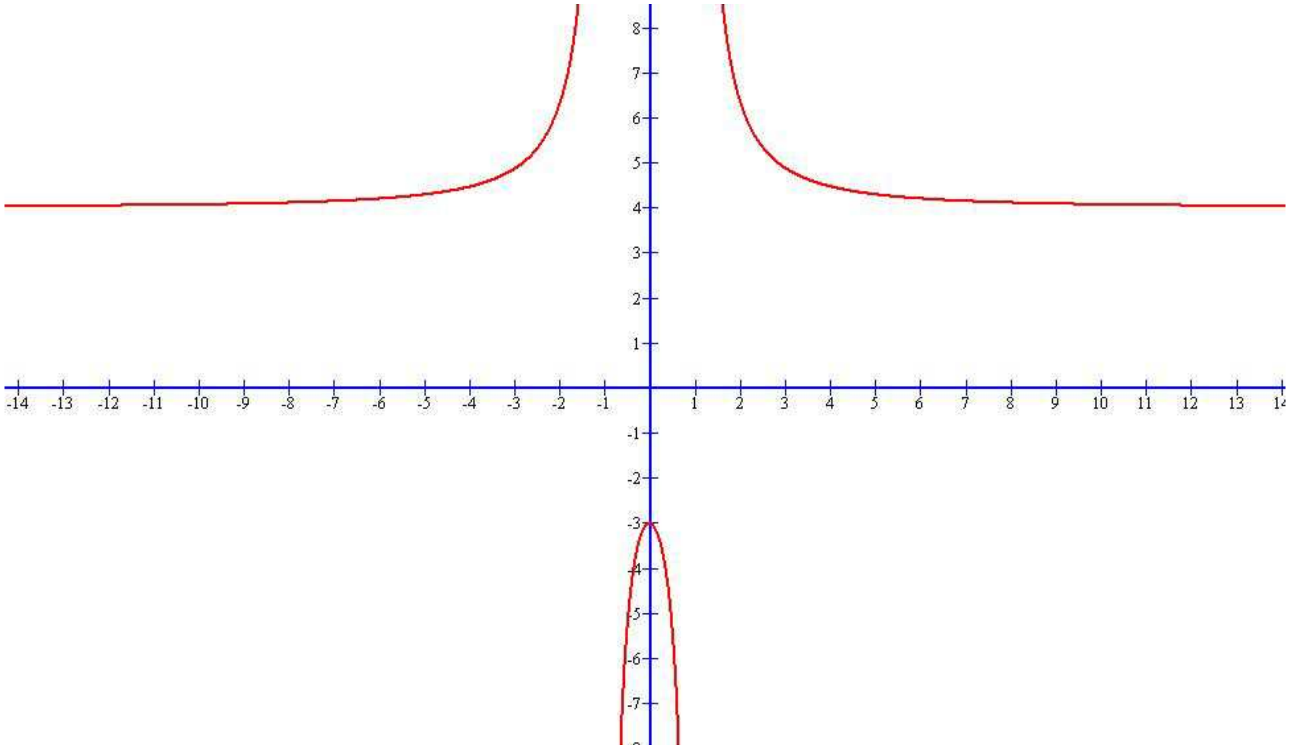


Grafico probabile di una funzione:

- Determinazione del dominio
- Studio del segno
- Analisi di eventuali simmetrie (pari, dispari, né pari né dispari)
- Ricerca delle intersezioni con gli assi
- Calcolo dei limiti agli estremi del dominio
- Ricerca di eventuali asintoti
- Plot del grafico probabile della funzione

Esempio

$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ asintoto verticale di equazione $x = 1$, asintoto obliquo di equazione $y = 3x + 1$

Teorema di Weierstrass

Se y = f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b], allora essa assume, in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.

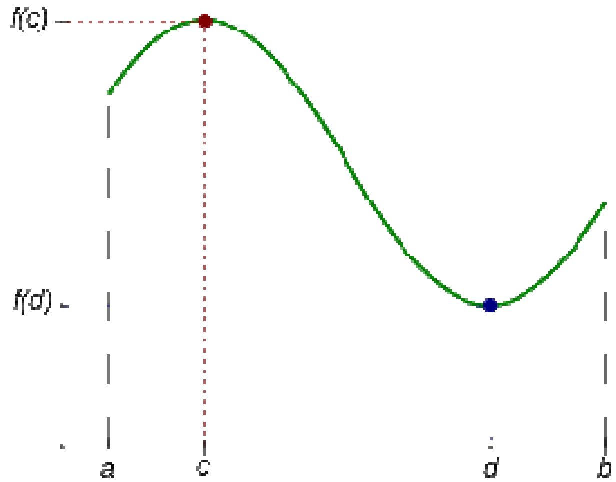
Ricordiamo: Si definisce massimo assoluto per una funzione il massimo del suo codominio, ossia l'estremo superiore del codominio che appartiene al codominio.

M è massimo assoluto di f(x)

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in D_f, f(x) \leq M \\ M = f(x_0), x_0 \in D_f \end{array}$$

m è minimo assoluto di f(x)

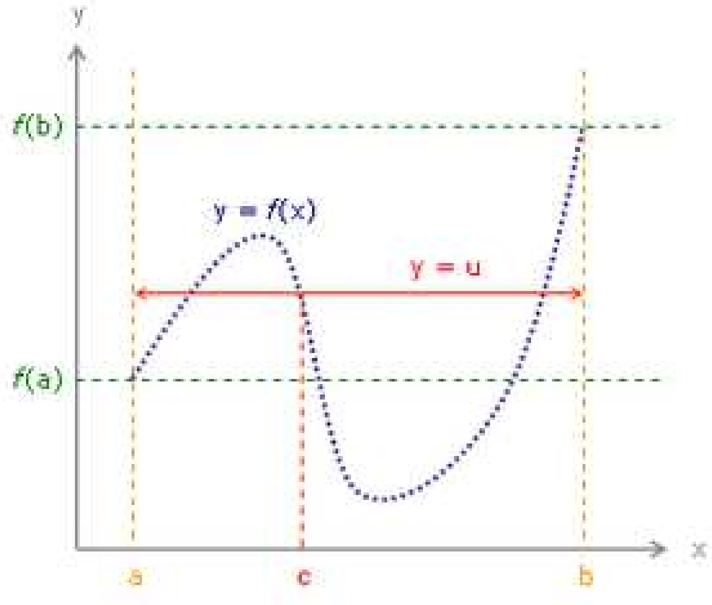
$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in D_f, f(x) \geq m \\ m = f(x_1), x_1 \in D_f \end{array}$$



Teorema dei valori intermedi

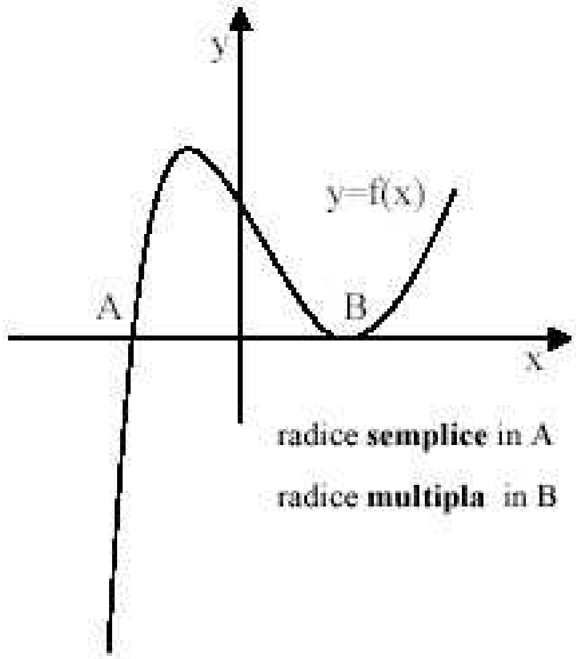
Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b], allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

$$f \text{ continua in } [a,b] \Rightarrow \forall u : m \le u \le M, \exists c \in [a,b] : f(c) = u$$

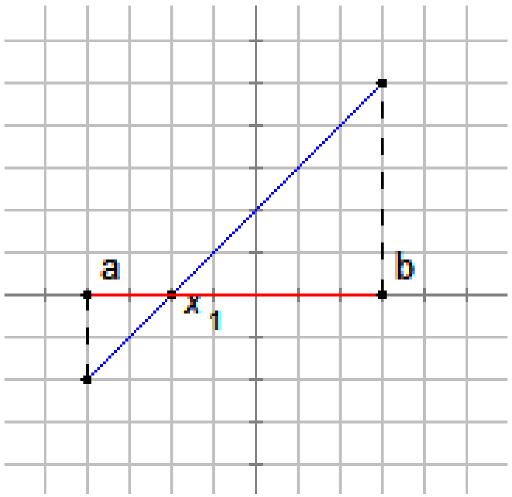


Teorema di esistenza degli zeri

Se y = f(x) è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso [a,b] e negli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla.



$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right. \Rightarrow \exists c\in \left]a,b\right[: f(c)=0$$



Si osservi che una funzione continua nell'intervallo chiuso [a,b] che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, se è anche strettamente monotona, allora ammetterà uno e un sol zero nell'intervallo considerato.

METODO DI BISEZIONE

Per determinare la radice di un’equazione f(x) = 0 si utilizza un metodo iterativo detto **metodo di bisezione**:

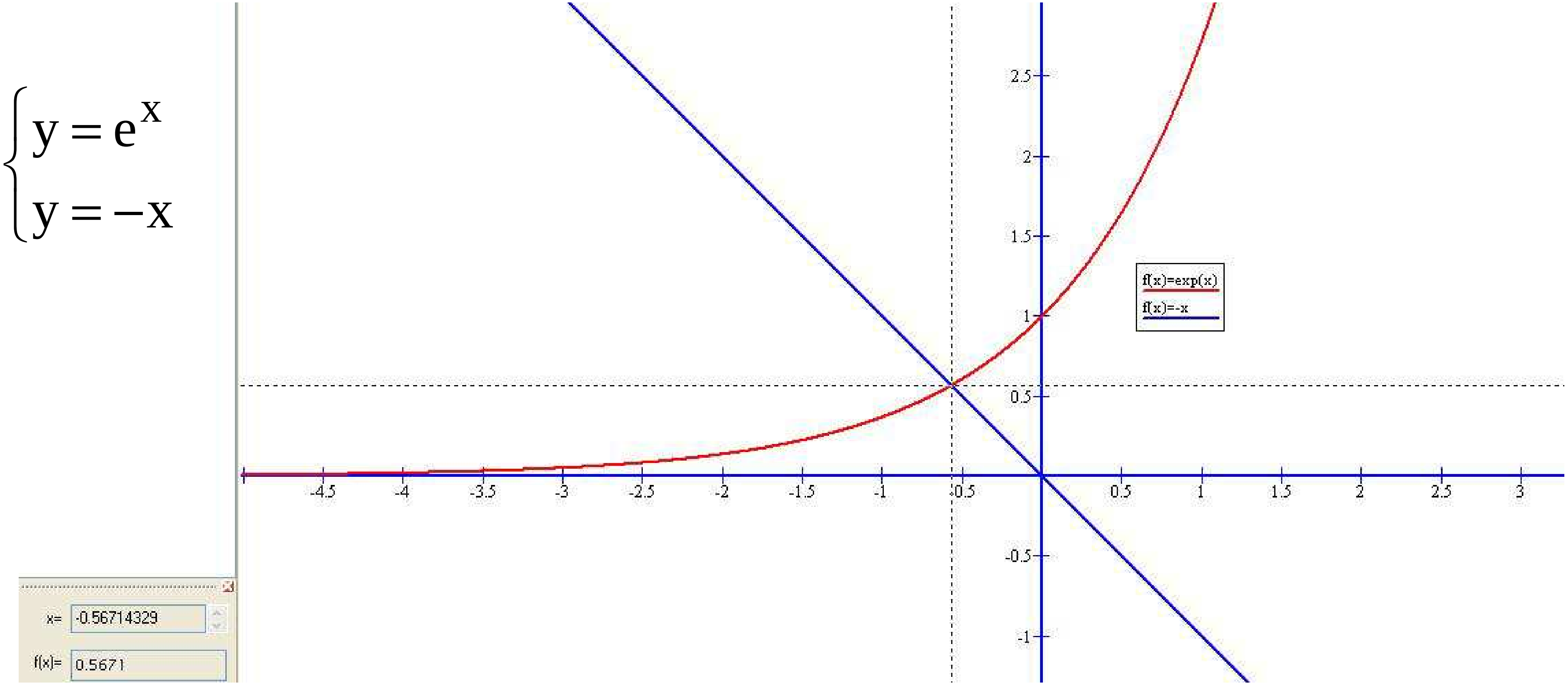
1. Si determina l’intervallo che contiene la soluzione dell’equazione f(x)=0 attraverso il teorema degli zeri. Sia esso [x1,x2] .
2. Dato l’intervallo [x1,x2] , si calcola la media di x1 e x2: x3=(x1+x2)/2
3. Si valuta quale sottointervallo [x1,x3] o [x3,x2] contiene la soluzione verificando la condizione $f(a) \cdot f(b) < 0$
4. Poi si reitera il calcolo.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON CONFRONTO GRAFICO

$$e^x + x = 0$$

Non risolubile algebricamente

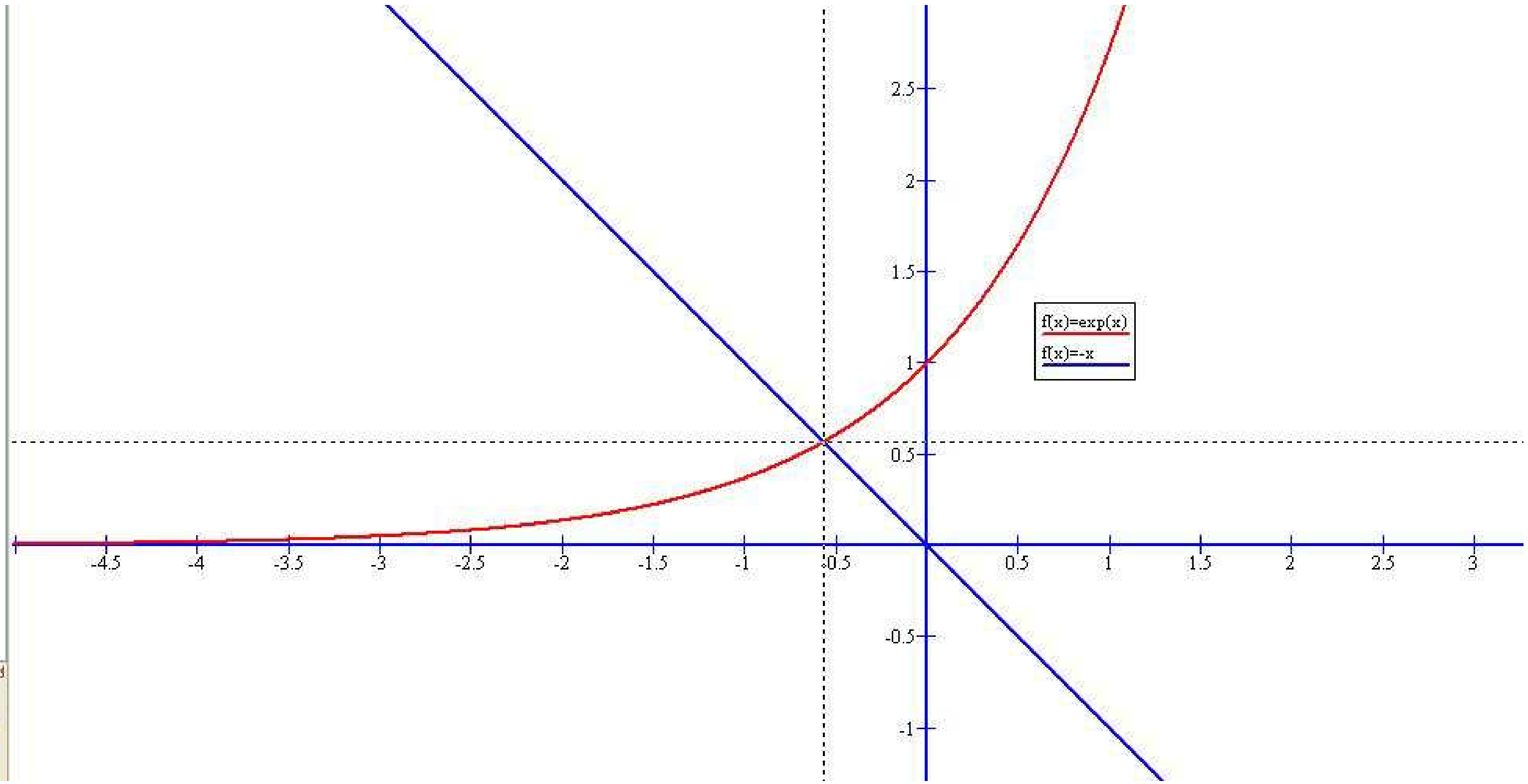
$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -x \end{cases}$$

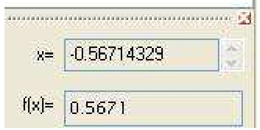


$$e^x + x > 0$$

$$e^x > -x$$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = -x \\ y_1 > y_2 \end{cases}$$





Vera per $x > x_0$ dove $x_0 \cong -0.56714329....$

Sappiamo che la funzione $y = e^{x} + x$ è continua, poiché somma di funzioni continue. Nell’intervallo [-1,-0.5] assume valori di segno opposto

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = -0,63099.. < 0$$

$$f(-0.5) = e^{-0.5} - 0.5 = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} = 0.10653.. > 0$$

Quindi esiste una soluzione dell’equazione $e^{x} + x = 0$ che cade nell’intervallo [-1,-0.5]

Calcoliamone la media:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 - 0.5}{2} = -0,75$$

Valutiamo ora quale dei due sottointervalli [-1,-0.75] e [-0.75,-0.5] soddisfano ancora il teorema

$$f(-0.75) = e^{-0.75} - 0.75 = -0.27763... < 0$$

Quindi considero l’intervallo [-0.75,-0.5] e ne calcolo ancora il punto medio:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-0.75 - 0.5}{2} = -0.625$$

$$f(-0.625) = e^{-0.625} - 0.625 = -0.08973857... < 0$$

Quindi considero l'intervallo [-0.625,-0.5] e ne calcolo il punto medio.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-0.625 - 0.5}{2} = -0.5625$$

E così via

Alla fine ci avvicineremmo al valore fornito dal calcolatore

$$x_0 \cong -0.56714329....$$

ESERCIZI

- Ricerca le equazioni degli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 4}$$

- Traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \qquad y = \ln \frac{x + 1}{x - 2} \qquad y = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x}$$

- Stabilisci se è verificato il teorema di esistenza degli zeri

$-1 + x + \text{sen}x = 0$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad$ $x^5 + 2x + 4 = 0$ in $[0,2]$

$\ln x + x = 0$ in $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

- Determina i punti di discontinuità e classifica le discontinuità delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{|x-3|}{x-3} + 1$$ (x= 3, 1° specie, salto = 2)

$$y = \frac{x^2-4}{|x+2|}$$ (x=-2, 1° specie, salto = 8)

$$y = \frac{x+3}{|x^2-9|}$$ (x = 3, 2° specie)

$$y = \frac{\mathrm{sen}\,\pi x}{6x}$$ (x=0, 3° specie)

$$y = \frac{e^{2x}-1}{3x}$$ (x = 0, 3° specie)

$$y = \begin{cases} -x & x \le -1 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{-2x} & x > -1 \end{cases}$$

(x = -1, 2° specie; x = 0, 3° specie)

- Si trovi per quali valori di a la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & x \le 0 \\ x^2 - a & x > 0 \end{cases}$$

ammette una discontinuità di prima specie con salto uguale a 3 in x = 0. Si rappresenti poi la funzione trovata.

- Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{ax+2} & x \le 0 \\ x^2 + 2x + b & x > 0 \end{cases}$ si trovi per quali valori di a e b la funzione è continua nel punto x = 0 e presenta un asintoto verticale in x = - 4. Si rappresenti poi la funzione trovata.