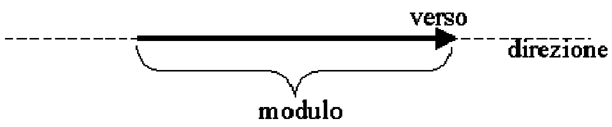
VETTORI. OPERAZIONI CON I VETTORI. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI. APPLICAZIONI.

Angela Donatiello

Sia $\overrightarrow{AB}$ un segmento orientato. Ad esso è possibile associare:



1) la **direzione**, cioè la direzione della retta su cui giace il segmento AB
2) il **verso**, ossia quello che sulla retta porta da A a B
3) il **modulo** (o intensità) dato dalla lunghezza del segmento AB rispetto ad una prefissata unità di misura. Tale modulo lo si indica con il simbolo ||AB||.

DEF. Due segmenti orientati si dicono **equipollenti** se hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.

- ✓ Esistono infiniti segmenti orientati equipollenti ad un segmento orientato dato $\overrightarrow{AB}$.
- ✓ La relazione di equipollenza tra segmenti orientati è una **relazione di equivalenza**, in quanto gode della proprietà **riflessiva, simmetrica e transitiva**.

Ricordiamo. R è una relazione di equivalenza se e solo se:

- ✓ R riflessiva : $\Leftrightarrow$ xRx, $\forall x \in S$
- ✓ R simmetrica : $\Leftrightarrow$ (xRy $\Rightarrow$ yRx)
- ✓ R transitiva $\Leftrightarrow$ (xRy, yRz $\Rightarrow$ xRz)

Ogni relazione di equivalenza “induce” sull’insieme in cui è definita una partizione “canonica” i cui elementi (sottoinsiemi di A a due a due disgiunti, la cui unione dà ancora A) sono le classi di equivalenza della partizione. L’insieme delle classi di equivalenze è detto Insieme Quoziente.

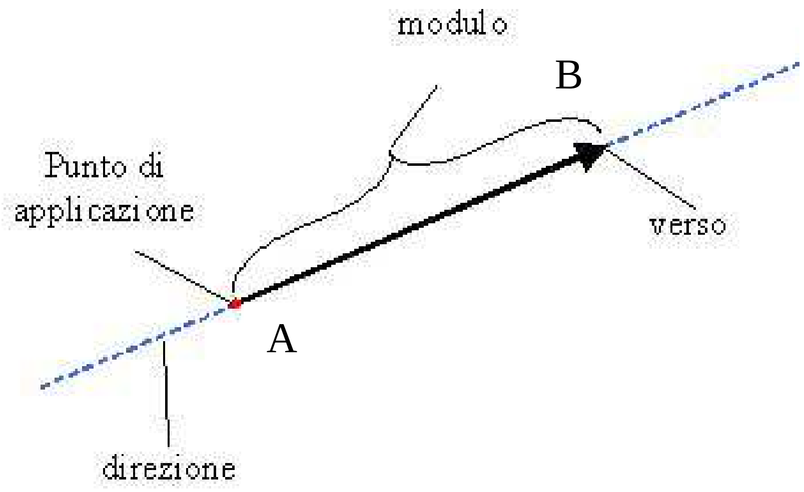
Dividiamo tutti i segmenti orientati dello spazio in classi di equivalenza, ponendo in ogni classe tutti i segmenti orientati tra loro equipollenti. In tal modo viene a costituirsi una partizione dello spazio data dall’insieme quoziente V i cui elementi sono le classi di equivalenza suddette.

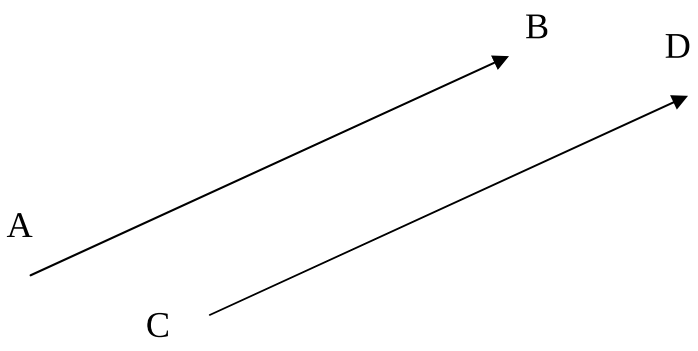
<u>DEFINIZIONE.</u> *Si chiama* ***<u>vettore</u>*** *ogni elemento dell’insieme quoziente V, ossia ogni classe di equivalenza di segmenti orientati.*

- ✓ $\overrightarrow{v}$ simbolo con cui si indicano i vettori (ossia le classi di equivalenza)
- ✓ $\| \overrightarrow{v} \|$ simbolo che indica il modulo di un vettore

Nella classe di equivalenza di $\overrightarrow{v}$ ci sono infiniti segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, tutti equipollenti tra loro, ognuno di questi segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ è detto un rappresentante del vettore $\overrightarrow{v}$.

- L’estremo A è detto punto di applicazione del vettore o origine.
- L’estremo B è detto estremo libero del vettore





Sicuramente è possibile affermare che $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (uguali nel senso di equipollenti)

- ✓ hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo
- ✓ ABCD è un parallelogramma
- ✓ Ogni segmento orientato può essere traslato parallelamente a se stesso
- ✓ La direzione di un vettore è la classe delle rette parallele, ossia è definita da un fascio improprio di rette

✓ Due vettori si dicono **<u>paralleli</u>** $\vec{u} // \vec{v}$ se hanno la stessa direzione

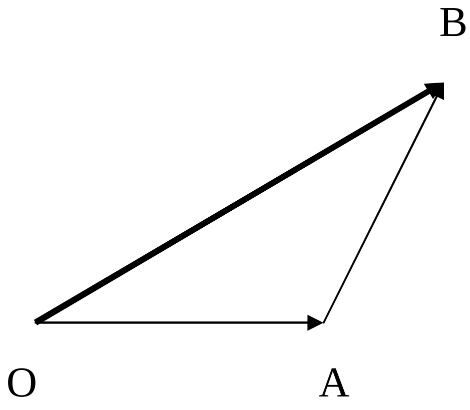
<u>VERSORE.</u> Si chiama **<u>versore</u>** un vettore di modulo unitario avente direzione e verso assegnato e si indica con il simbolo $\hat{v}$

<u>VETTORE NULLO</u>. Si chiama **<u>vettore nullo</u>** un vettore che ha modulo nullo e direzione e verso indeterminati. Tale vettore si indica con il simbolo $\vec{0}$.

<u>VETTORI OPPOSTI.</u> Due vettori si dicono **<u>opposti</u>** se hanno stessa direzione, stesso modulo, ma verso opposto.

<u>SOMMA TRA VETTORI</u>

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori non nulli, sia O un punto qualunque del piano, siano $\vec{OA}$ e $\vec{AB}$ due rappresentanti rispettivamente dei vettori $\vec{u}$ e



$\vec{v}$, si definisce **<u>somma (o risultante</u>**) dei due vettori il vettore avente come rappresentante il segmento orientato $\overrightarrow{OB}$.

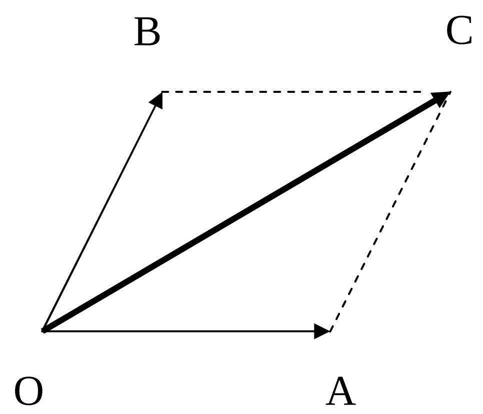
(metodo punta – coda)

Tale somma si indica con il simbolo $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$

NOTA. Attenzione a non confonderla con l'usuale somma tra numeri!!! Anche se il simbolo usato per indicarla è ancora un "+", essa rappresenta un'operazione diversa, in quanto applicata ad elementi completamente diversi.

<u>REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA</u>

E' possibile definire la somma tra vettori anche in un altro modo, ossia traslando il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ in modo da portare entrambi i segmenti orientati nel medesimo punto di applicazione O. In tal caso la risultante o somma sarà la diagonale $\overrightarrow{OC}$ del parallelogramma avente per lati i due segmenti orientati $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



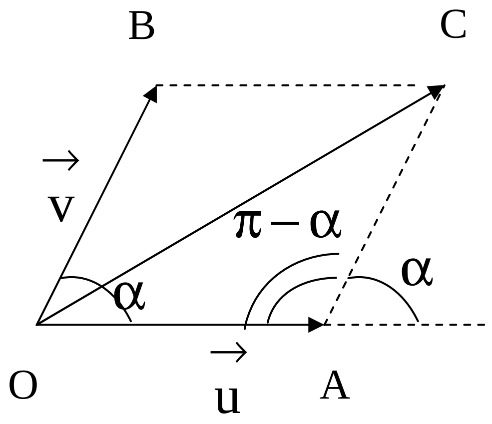
PROPRIETA' DELLA SOMMA

- ✓ La somma tra vettori è una legge interna, ossia $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$ è ancora un vettore
- ✓ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ proprietà associativa
- ✓ $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ esistenza dell'elemento neutro per la somma
- ✓ $\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$ esistenza dell'elemento simmetrico
- ✓ $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ proprietà commutativa

V (+) è un gruppo abeliano

MODULO DEL VETTORE SOMMA

E' possibile determinare il modulo del vettore somma, noti i moduli dei due vettori e l'angolo da essi formato



$$\left\|\vec{w}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cos(\pi-\alpha)$$

Casi particolari:

- ✓ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i vettori sono perpendicolari $\left\|\vec{w}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2$

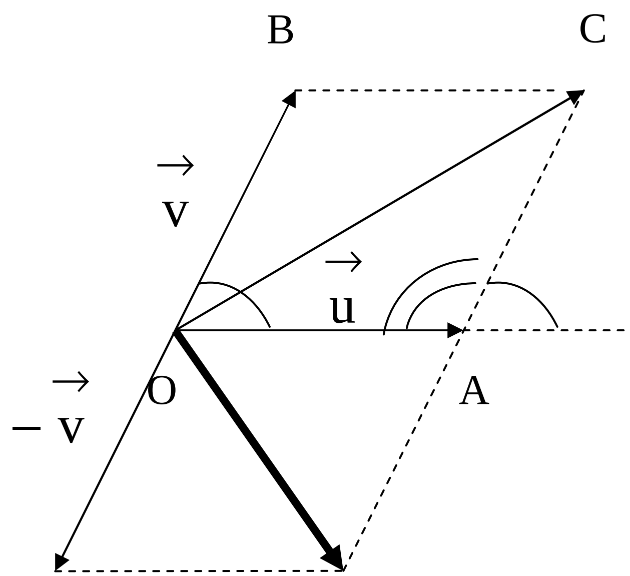
- ✓ $\alpha = 0$ i vettori hanno stessa direzione e stesso verso $\left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

- ✓ $\alpha = 180°$ i vettori hanno stessa direzione, ma verso opposto $\left\|\vec{w}\right\| = \left| \left\|\vec{u}\right\| - \left\|\vec{v}\right\| \right|$

DIFFERENZA TRA VETTORI

La differenza tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è uguale alla somma di $\vec{u}$ con l'opposto di $\vec{v}$

$$(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}+(-\vec{v})$$



PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Def. Uno **scalare** è un numero reale.

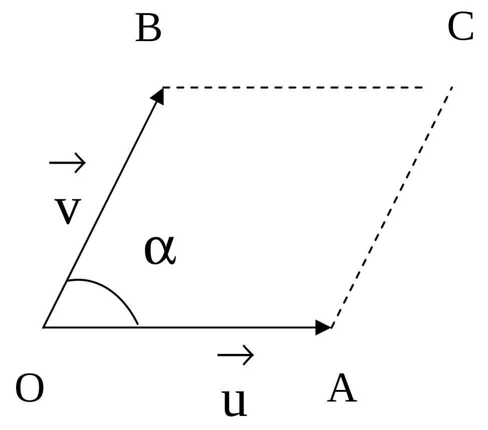
Se k è uno scalare e $\vec{v}$ un vettore, il **prodotto dello scalare k per il vettore** $\vec{v}$ è

1) ancora un vettore (legge interna)
2) ha direzione uguale a quella del vettore $\vec{v}$ (sono vettori paralleli)
3) modulo uguale al valore assoluto di k per il modulo di $\vec{v}$ $\left\|k\vec{v}\right\| = |k| \cdot \left\|\vec{u}\right\|$
4) verso uguale a quello di $\vec{v}$ se k > 0, opposto a quello di $\vec{v}$ se k < 0

Proprietà del prodotto di uno scalare per un vettore

- ✓ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$ (elemento neutro per il prodotto)
- ✓ $(m+n) \cdot \vec{u} = m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{u}$ proprietà distributive
- ✓ $m(\vec{u} + \vec{v}) = m \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$
- ✓ $m(n \cdot \vec{u}) = (mn) \cdot \vec{u}$ proprietà associativa Oss. $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ versore

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI



Si definisce prodotto scalare dei due vettori lo scalare

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\alpha$$

Variazioni e casi particolari:

- ✓ $\alpha = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- ✓ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\alpha < 1 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} > 0$
- ✓ $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = 0$
- ✓ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow -1 < \cos\alpha < 0 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} < 0$
- ✓ $\alpha = \pi \Rightarrow \cos\pi = -1 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

Condizione di perpendicolarità: Due vettori non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Esercizio: Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $\left||\vec{u}|\right| = 10\ e\ \left||\vec{v}|\right| = 6$ determina il loro prodotto scalare nel caso in cui i due vettori formino un angolo di 45° e nel caso in cui formino un angolo di 120°.

Proprietà del prodotto scalare

1) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ proprietà commutativa
3) $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$
4) $\overrightarrow{(u + \vec{v})} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma
5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$ in quanto ogni vettore è parallelo a se stesso, per cui cos0 = 1
6) $\hat{u} \cdot \hat{v} = cos\alpha$
7) $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$
8) $\hat{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||cos\alpha$
9) $\hat{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||$

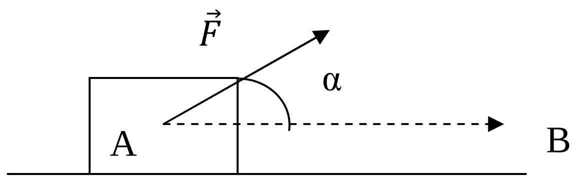
10) Ricordiamo la relazione che permette di calcolare il modulo della somma di vettori mediante il teorema di Carnot:

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cos(\pi-\alpha) = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cos\alpha = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\,\vec{u}\bullet\vec{v}$$

Ciò permette di determinare il prodotto scalare tra due vettori, noti i moduli dei due vettori e della loro somma $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$

Applicazioni in fisica

1) Lavoro di una forza costante

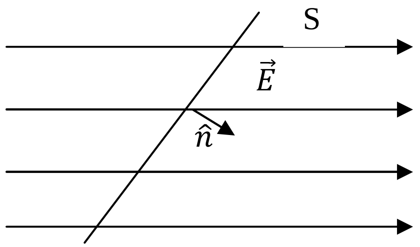


$\vec{F} = vettore\ forza$

$\overrightarrow{AB} = segmento\ orientato\ che\ rappresenta\ il\ vettore\ spostamento\ \vec{s}$

$L_{AB} = \vec{F}\cdot\vec{s} = Fscos\alpha$

2) Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie piana

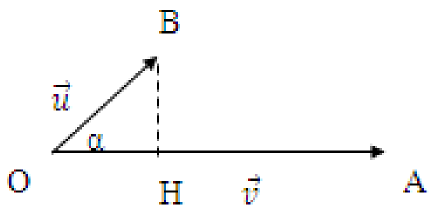


$\vec{S} = \hat{n}S = vettore\ superficie$

$\Phi_S(\mathrm{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}S = EScos\alpha$

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori. Siano $\overrightarrow{OA}\ e\ \overrightarrow{OB}$ due loro rappresentanti. Sia α l'angolo tra essi compreso.

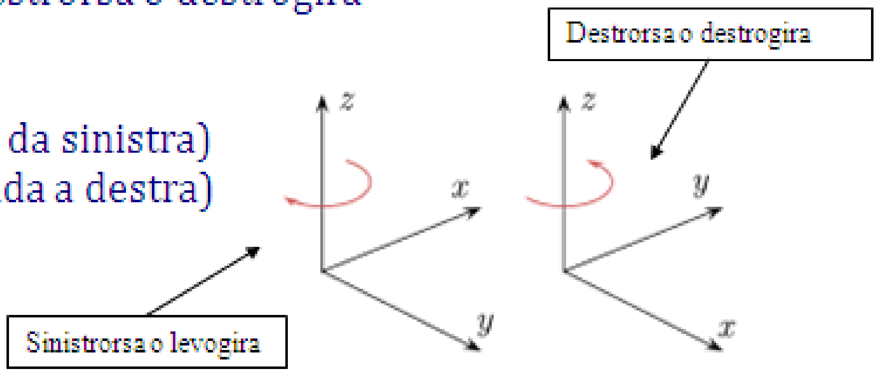


$BH = \|\vec{v}\|\ sen\alpha$

Si definisce prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ un vettore avente:

1) Modulo $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ sen\alpha$ $\qquad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = Area\ del\ parallelogramma$
2) Direzione perpendicolare al piano su cui giacciono i due vettori
3) Verso determinabile con la regola della mano destra, ossia verso tale che i tre vettori $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ formino nell'ordine una terna destrorsa o destrogira

Nella figura è mostrata una terna (la prima da sinistra) sinistrorsa o levogira, e una terna (la seconda a destra) destrorsa o destrogira.

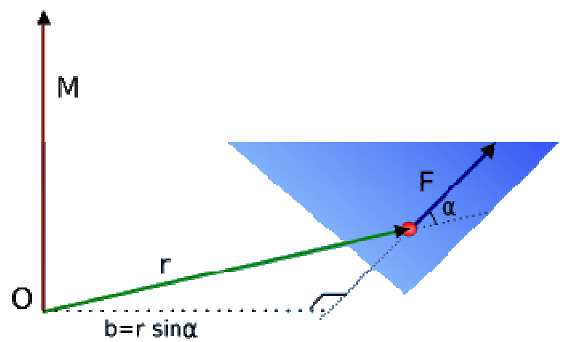


Proprietà del prodotto vettoriale

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$
2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
3) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
4) $\vec{u} \wedge \hat{u} = \vec{0}$
5) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Applicazioni in fisica

Momento di una forza rispetto ad un punto O



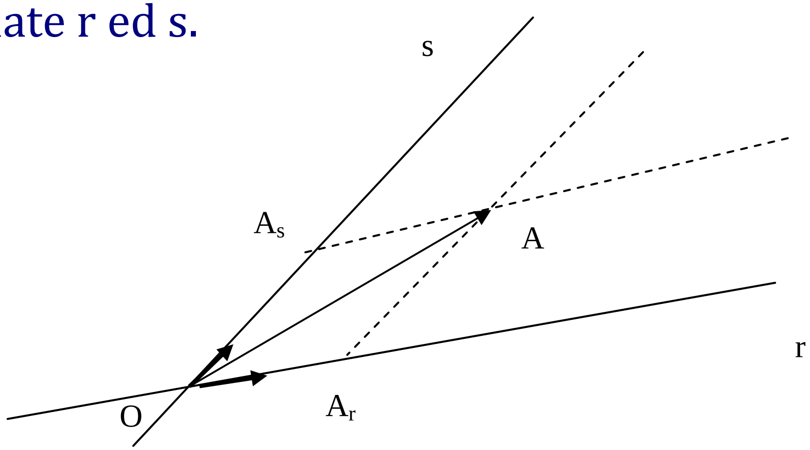
Il momento di una forza ha:

1) Modulo uguale a M = F $r sen \alpha$ = F b con

   b = braccio della forza = $r sen \alpha$
2) Direzione perpendicolare al piano su cui giacciono r ed F
3) Verso uguale a quello di avanzamento di una vite destrorsa, ossia ruotando in senso antiorario di un angolo minore di 180° sovrapponendo r con F. Equivalentemente si può dire che nell'ordine $\vec{r}$; $\vec{F}$; $\vec{M}$ costituiscono una terna destrorsa.

<u>**DECOMPOSIZIONE DI UN VETTORE RISPETTO A DUE DIREZIONI ASSEGNATE**</u>

Sia $\vec{u}$ un vettore e $\overrightarrow{OA}$ un suo rappresentante. Siano r ed s rette assegnate nel piano. Si traccino le parallele ad r ed s passanti per l'estremo libero A del segmento orientato e si individuino un punto A_r e un punto A_s come intersezioni delle parallele suddette con le rette assegnate r ed s.



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_r} + \overrightarrow{OA_s}$ Per definizione di somma

$\vec{u} = \overrightarrow{A_r} + \overrightarrow{A_s} = A_r\hat{r} + A_s\hat{s}$ $A_r \; e \; A_s$ sono dette componenti del vettore lungo le due direzioni assegnate

I versori $\hat{r} \; ed \; \hat{s}$ costituiscono una base del piano

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI. BASI

Siano $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ n vettori.

Si dice che il vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** dei vettori $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ se risulta $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$ con $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ numeri reali

I vettori $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono n numeri reali $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ **non tutti nulli**, tali che $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$

Se ciò non si verifica, cioè se la combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ è uguale al vettore nullo solo con scalari $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ tutti nulli, allora i vettori si diranno **linearmente indipendenti**.

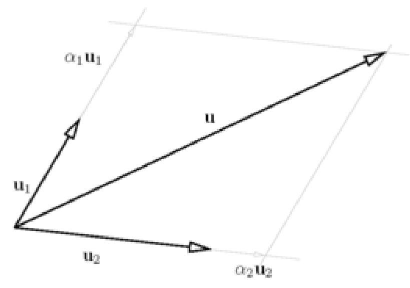
Se i vettori $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti allora uno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Infatti, essendo gli scalari $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ non tutti nulli, allora esisterà, ad esempio $\lambda_1 \neq 0$ per cui $\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 + \cdots + -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{v}_n = \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_n\vec{v}_n$

Due vettori paralleli sono linearmente dipendenti: infatti se $\vec{u} // \vec{v}$ allora $\vec{v} = m\vec{u}$

Viceversa se sono linearmente dipendenti, allora sono paralleli.

- ✓ Sulla retta il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è 1
  Ogni altro vettore sarebbe parallelo al primo e quindi del tipo

- ✓ Nel piano il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è 2.
  (E' intuitivo comprendere ciò, in quanto ogni altro vettore potrebbe essere visto come somma dei primi due e pertanto come combinazione lineare dei primi due)



- ✓ Nello spazio il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è 3

I vettori linearmente indipendenti del piano o dello spazio costituiscono una <u>base</u> del piano o dello spazio, ossia ogni altro vettore potrà essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base.

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI NEL PIANO

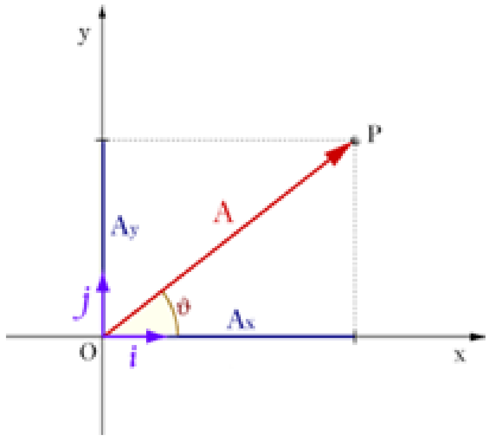
Una delle scomposizioni più usuali di un vettore lungo due direzioni assegnate è quella che considera le due direzioni perpendicolari tra loro.

Si consideri un sistema cartesiano ortogonale xOy. Indichiamo con $\hat{\imath}$ il versore avente la direzione e il verso del semiasse positivo delle ascisse e con $\hat{\jmath}$ il versore avente la direzione e il verso del semiasse positivo delle ordinate, entrambi applicati nel punto O.

Sia $\vec{A}$ un vettore del piano e $\overrightarrow{OP}$ il suo rappresentante applicato in O.

Si può osservare che i tre vettori $\vec{A}$, $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono linearmente dipendenti, per cui $\vec{A}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, cioè

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$



Per determinare i coefficienti A_x e A_y conduciamo dall'estremo libero del segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ le perpendicolari agli assi.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$$

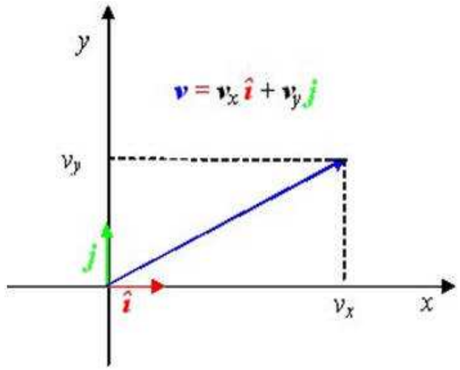
$$\vec{A} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

$\vec{A} = (A_x; A_y)$ $\hat{\imath} = (1; 0)$ $\hat{\jmath} = (0; 1)$ $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ costituiscono una BASE nel piano detti VERSORI CANONICI degli assi

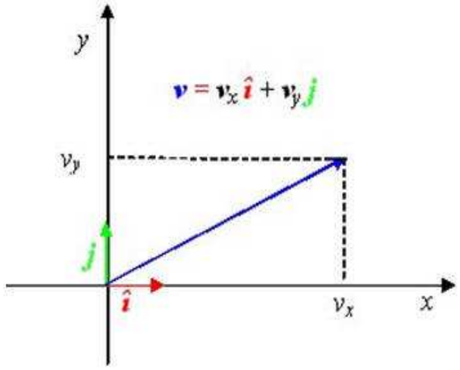
✓ Determinazione del modulo del vettore $\vec{v}$ note le componenti

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

applicando il Teorema di Pitagora



✓ Determinazione delle componenti del vettore $\vec{v}$ noto il suo modulo e l'angolo che esso forma con l'orizzontale



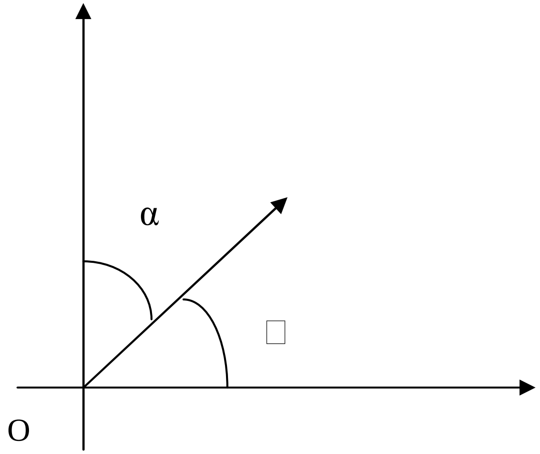
Detto ϑ l'angolo che il vettore forma con il semiasse positivo delle ascisse si ha che:

$$v_x = ||\vec{v}||cos\vartheta$$
$$v_y = ||\vec{v}||sen\vartheta$$

✓ Determinazione dell'angolo ϑ note le componenti del vettore

$$\vartheta = arctg\,\frac{v_y}{v_x}$$

VERSORI E COSENI DIRETTORI



$$v_x = ||\vec{v}||cos\vartheta$$

$$v_y = ||\vec{v}||sen\vartheta = ||\vec{v}||sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ||\vec{v}||cos\alpha$$

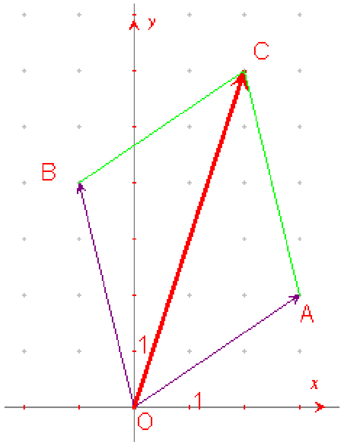
$$cos\vartheta = \frac{v_x}{||\vec{v}||}$$

$$cos\alpha = \frac{v_y}{||\vec{v}||}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{v_x}{||\vec{v}||}; \frac{v_y}{||\vec{v}||}\right) = (cos\vartheta; cos\alpha)$$

OPERAZIONI TRA VETTORI MEDIANTE LE COMPONENTI CARTESIANE

Somma tra vettori



$\vec{a} = (a_x; a_y) \qquad \vec{b} = (b_x; b_y)$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y)$

Esempio: $\vec{a} = (3; 2) \qquad \vec{b} = (-1; 4)$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2; 6)$

Prodotto di un vettore per uno scalare

$$\vec{a} = (a_x; a_y)$$
$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y)$$

Prodotto scalare tra due vettori

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cos \alpha$$

Dati i versori $\hat{\imath} = (1; 0)$ $\hat{\jmath} = (0; 1)$ per le proprietà sul prodotto scalare si ha che:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = i^2 = 1 \qquad \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = j^2 = 1 \qquad \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$$

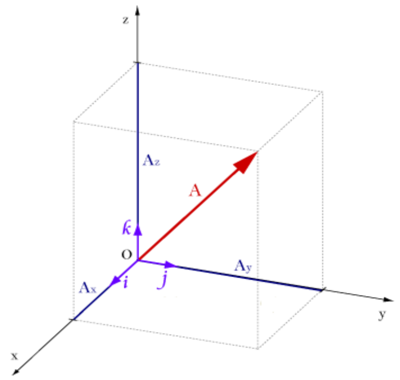
Siano $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}$ e $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$ due vettori entrambi applicati in O ed espressi mediante le componenti cartesiane, si ha che:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}\right) \cdot \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = u_x v_x \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + u_x v_y \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + u_y v_x \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + u_y v_y \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = u_x v_x + u_y v_y$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

$$cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

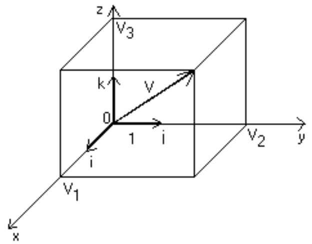
RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI NELLO SPAZIO



$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

$\hat{\imath} = (1; 0; 0)$ $\hat{\jmath} = (0; 1; 0)$ $\hat{k} = (0; 0; 1)$

VERSORI CANONICI degli assi



$$\overrightarrow{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} = (v_x; v_y; v_z)$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\hat{\imath} + (u_y + v_y)\hat{\jmath} + (u_z + v_z)\hat{k}$$

Prodotto vettoriale tra due vettori

$$\hat{\imath} \wedge \hat{\imath} = \vec{0} \qquad \hat{\jmath} \wedge \hat{\jmath} = \vec{0} \qquad \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath} \wedge \hat{\imath} = -\hat{k} \qquad \hat{k} \wedge \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \qquad \hat{\imath} \wedge \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Siano $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ e $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}\right) \wedge \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\ \right) =$$

$$= \left(u_y v_z - u_z v_y\right)\hat{\imath} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{\jmath} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\hat{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$