PROBLEMI SU PARABOLA E CIRCONFERENZA PER LA CLASSE TERZA
IN PREPARAZIONE DELLE VERIFICHE

Parabola e circonferenza

122 Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per $A(1; 0)$, $B(7; 0)$ e tale che il suo vertice abbia ordinata -9.
Sia D il suo punto d'intersezione con l'asse y. Scrivere le equazioni delle tangenti t e t' rispettivamente parallela e perpendicolare alla corda BD e siano T e T' i punti di contatto ed E il loro punto di intersezione. Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo TET'.

$y = x^2 - 8x + 7$; $D(0;\ 7)$; $y = -x - \frac{21}{4}$; $y = x - \frac{53}{4}$; $T\left(\frac{7}{2}; -\frac{35}{4}\right)$; $T'\left(\frac{9}{2}; -\frac{35}{4}\right)$; $E\left(4; -\frac{37}{4}\right)$; $(x-4)^2 + \left(y + \frac{35}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

123 Dopo aver scritto l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, avente vertice in $V(1; 1)$ e passante per $\left(2; \frac{7}{3}\right)$, determinare:

a) una parallela all'asse x che stacchi sulla parabola una corda AB di lunghezza 3;
b) l'equazione della circonferenza tangente alla corda AB e alla parabola nel vertice.

$y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$ • *a)* $y = 4$ • *b)* $x^2 + y^2 - 2x - 5y + 5 = 0$

139 Dopo aver determinato le equazioni delle due circonferenze tangenti nell'origine alla retta $y = -2x$ e aventi raggio $\sqrt{5}$, detti C_1 e C_2 i centri, scrivere l'equazione della parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$ passante per C_1 e C_2 e $A(0; 4)$ e l'equazione della retta parallela alla congiungente C_1C_2 e tangente alla parabola.

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta $y = \frac{1}{2}x + k$ ha intersezioni tanto con la parabola quanto con le circonferenze?

$x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$; $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$; $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + 4$; $y = \frac{1}{2}x + 4$; $k \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$

140 Nel piano xOy:

a) determinare l'equazione della circonferenza avente per centro il punto $(2; 2)$ e tangente alla retta r: $y = x + 4$;
b) detto A l'ulteriore punto (oltre l'origine O degli assi) di intersezione della circonferenza con l'asse x, determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in O alla retta $y = -8x$;
c) determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola e parallela alla retta $y = -2x + 3$, indicando con H il punto di tangenza;
d) determinare l'equazione della retta s parallela a r che incontra la parabola in due punti M ed N in modo che sia $\overline{MN} = \frac{7}{\sqrt{2}}$;
e) calcolare l'area del triangolo MNH.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ • *b)* $y = 2x^2 - 8x$ • *c)* t: $y = -2x - \frac{9}{2}$ • *d)* s: $y = x - 4$ • *e)* $\mathcal{A}(MNH) = \frac{35}{4}$

24 Dopo aver tracciato il grafico della parabola γ: $y = x^2 + 2x$ di vertice V e fuoco F, rispondere ai seguenti quesiti:

a) determinare le equazioni delle rette t_1, t_2 e t_3 tangenti a γ rispettivamente nell'origine O, in V e nel punto P di γ avente ascissa -3;

b) determinare le coordinate dei vertici del triangolo ABC che formano le tre rette tangenti e l'equazione della circonferenza a esso circoscritta;

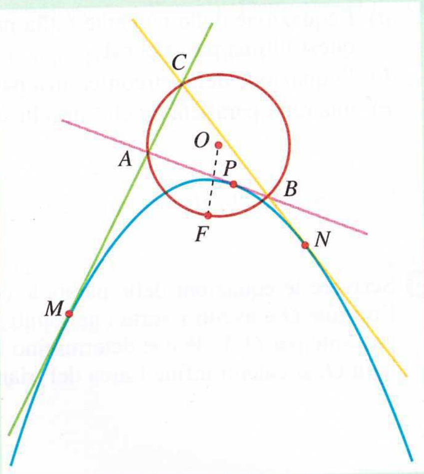
c) verificare che tale circonferenza passa per il fuoco F.

$F\left(-1; -\frac{3}{4}\right)$ • *a)* $y=2x$; $y=-1$; $y=-4x-9$ • *b)* $A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $B(-2; -1)$; $C\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$; $x^2+y^2+\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}y+\frac{15}{4}=0$

Osservazione

La proprietà espressa nel punto *c)* dell'esercizio precedente è una proprietà comune a tutte le parabole.

La circonferenza circoscritta al triangolo ABC formato dalle rette tangenti in tre punti M, N e P di una parabola passa per il fuoco della parabola.



125 Determinare l'equazione della circonferenza avente centro $C(-1; 1)$ e passante per l'origine O degli assi. Siano A e B i suoi ulteriori punti d'intersezione rispettivamente con gli assi x e y. Determinare:

a) l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, avente vertice in A e passante per B;

b) le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla parabola nei suoi punti d'intersezione con l'asse y.

$x^2+y^2+2x-2y=0$ • *a)* $x=\frac{1}{2}y^2-2$ • *b)* $y=\frac{1}{2}x+2$; $y=-\frac{1}{2}x-2$

126 Dopo aver determinato l'equazione della circonferenza passante per i punti $(1; \sqrt{5})$, $(3; 3)$ e avente il centro C sulla retta r di equazione $x + 2y - 3 = 0$, determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, tangente in C a r e avente l'ordinata del vertice uguale a 3.

$x^2+y^2-6x=0$; $x=\frac{1}{3}y^2-2y+3$

127 In un sistema cartesiano ortogonale xOy, determinare l'equazione della parabola γ con asse parallelo all'asse y, che sia tangente alle tre rette di equazioni:

$$y = 2x + 3 \qquad y = -4x - 12 \qquad y = 0$$

Detti A, B e C i rispettivi punti di contatto, trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB. Detto L il punto simmetrico di C rispetto al centro della circonferenza, condurre per L una retta che incontri la simmetrica γ_1 della parabola γ rispetto all'asse y in due punti E ed F tali che la distanza tra le loro proiezioni sull'asse x sia uguale a 1.

$y=(x+2)^2$; $A(-1; 1)$; $B(-4; 4)$; $C(-2; 0)$; $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$; $\gamma_1: y=(x-2)^2$;
$y=-x+2$; $y=-19x-52$

128 Scritta l'equazione della circonferenza tangente in O alla retta t: $x = 2y$ e avente il centro C sulla retta $2x - 2y + 3 = 0$, determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, avente vertice in C e passante per O, e l'area del triangolo formato dalla retta t, dalla tangente alla parabola nel vertice e dall'asse della parabola.

$x^2 + y^2 + x - 2y = 0$; $y = -4x^2 - 4x$; area $= \frac{25}{16}$

129 Dopo aver scritto l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, avente vertice in $V(1; 0)$ e passante per $A\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$ indicato con C il suo punto d'intersezione con l'asse y, determinare:

a) l'equazione della tangente t alla parabola in C e l'equazione della normale n in C, verificando che quest'ultima passa per A;
b) l'equazione della circonferenza passante per C, A, B, essendo B l'intersezione di t con l'asse x;
c) una retta parallela a t che stacchi sulla parabola una corda di lunghezza uguale a 20.

$y = x^2 - 2x + 1$; $C(0; 1)$ • *a*) t: $y = -2x + 1$; n: $y = \frac{1}{2}x + 1$ •
b) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{145}{64}$ • *c*) $y = -2x + 21$

130 Scrivere le equazioni delle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y, passanti entrambe per l'origine O e aventi i vertici nei punti $V(2; 1)$ e $W(-1; 2)$. Si scriva poi l'equazione della circonferenza passante per O, V, W e si determinino le sue ulteriori intersezioni A e B con le tangenti alle due parabole in O; si calcoli infine l'area del triangolo AOB.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$; $y = -2x^2 - 4x$; $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$; $y = x$;
$y = -4x$; $A(2; 2)$; $B\left(-\frac{11}{17}; \frac{44}{17}\right)$; $\mathcal{A}(AOB) = \frac{55}{17}$

131 Dati i tre punti $O(0; 0)$, $A\left(\frac{5}{2}; 5\right)$ e $B\left(5; \frac{15}{4}\right)$, scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per B e tangente in O alla retta OA.
Successivamente:

a) determinare le coordinate del vertice V, del fuoco F e l'equazione della direttrice;
b) verificare che il punto A è sulla direttrice, che la retta AB è perpendicolare alla retta OA ed è tangente alla parabola;
c) determinare la semicirconferenza circoscritta al triangolo OAB.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ • *a*) $V(4; 4)$; $F(4; 3)$; d: $y = 5$ • *b*) AB: $2x + 4y - 25 = 0$;
OA: $y = 2x$ • *c*) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - \frac{15}{4}y = 0 \\ 3x - 4y \leq 0 \end{cases}$

132 Scritta l'equazione della parabola che incontra l'asse x nei punti A e B di ascisse rispettivamente -2 e 4 e la cui tangente t in A è perpendicolare alla retta r: $x + 2y = 0$, determinare:

a) il punto C d'intersezione tra t ed r;
b) la retta s parallela a r passante per B;
c) le coordinate di due vertici del rettangolo di diagonale CB avente due lati su r e t e l'equazione della circonferenza circoscritta a tale rettangolo.

$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ • *a*) $C\left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$ • *b*) s: $x + 2y - 4 = 0$ • *c*) $\left(\frac{16}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, $\left(-\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right)$;
$5x^2 + 5y^2 - 12x - 4y - 32 = 0$

133 Scritta l'equazione della parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per $B(2;\ 0)$ e avente per tangente in $C(1;\ 3)$ la retta t parallela alla retta r: $2x + y = 0$, determinare:

a) i vertici, il perimetro e l'area del quadrato avente per diagonale CO e due lati su r e t;

b) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrato sopra considerato.

$y = -x^2 + 4$ • *a)* $(1;\ 3)$; $(2;\ 1)$; $(-1;\ 2)$; $(0;\ 0)$;
perimetro $= 4\sqrt{5}$; area $= 5$ • *b)* $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

134 Scritta l'equazione della circonferenza passante per i punti $O(0;\ 0)$, $M(6;\ 0)$ ed $N\left(4;\ 2\sqrt{2}\right)$, e indicato con C il suo centro, determinare l'equazione della parabola avente come vertice il punto C e come direttrice la retta $x = \frac{15}{4}$ e indicare con A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse y. Detto poi D il punto d'intersezione delle rette tangenti in A e B alla parabola, calcolare l'area del triangolo ABD.

$x^2 + y^2 - 6x = 0$; $x = -\frac{1}{3}y^2 + 3$; $D(6;\ 0)$; $\mathscr{A}(ABD) = 18$

135 Nel piano xOy determinare:

a) l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per $A(-4;\ 0)$ e avente vertice $V(-2;\ 2)$;

b) l'equazione della retta parallela all'asse x sulla quale la parabola stacca una corda di lunghezza uguale a 2;

c) l'equazione della circonferenza di centro $C(0;\ 2)$ e tangente alla retta AV;

d) l'area del triangolo AVC.

a) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ • *b)* $y = \frac{3}{2}$ • *c)* $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$; $\mathscr{A}(AVC) = 2$

136 Nel piano xOy determinare:

a) l'equazione della parabola $\mathscr{P}_1$ avente asse parallelo all'asse y e passante per $A(2;\ 0)$, $B(6;\ 0)$, e $C(0;\ 6)$;

b) l'area del triangolo ACH, essendo H l'ulteriore punto d'intersezione di $\mathscr{P}_1$ con la perpendicolare per A alla retta AC;

c) l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo CAH;

d) le coordinate dei punti d'intersezione di $\mathscr{P}_1$ con la parabola $\mathscr{P}_2$ avente asse parallelo all'asse x, passante per $D\left(\frac{5}{2};\ 1\right)$ e avente vertice nel punto $(-2;\ 4)$.

a) $\mathscr{P}_1$; $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ • *b)* $\mathscr{A}(ACH) = \frac{140}{9}$ • *c)* $x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - \frac{68}{9}y + \frac{28}{3} = 0$ • *d)* $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 6$

137 Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y passante per i punti $A(1;\ 0)$, $B(2;\ -5)$ e avente in questo punto per tangente la retta di coefficiente angolare -6.
Scrivere poi l'equazione della circonferenza passante per i punti $(-3;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(-1;\ 4)$ e determinare l'equazione della retta parallela all'asse x in modo che risulti uguale a 35 la somma dei quadrati delle lunghezze delle corde staccate su tale retta dalla parabola e dalla circonferenza.

$y = -x^2 - 2x + 3$; $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 3 = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{2}$

138 Detta r la retta di equazione $y = 2x - 2$ ed s la parallela a r passante per $A(-1;\ 0)$, determinare:

a) l'equazione della circonferenza tangente a r e a s e il cui centro appartiene alla retta $y = 5x - 3$;

b) detti T e T' i punti di tangenza con r ed s, le coordinate dei vertici del quadrato $TRT'S$ inscritto;

c) l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y con vertice in A e passante per $B(1;\ 5)$.

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$ • *b)* $T\left(\frac{9}{5};\ \frac{8}{5}\right)$; $T'\left(\frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$; $R\left(\frac{3}{5};\ \frac{6}{5}\right)$; $S\left(\frac{7}{5};\ \frac{14}{5}\right)$ • *c)* $y = \frac{5}{4}(x+1)^2$