

## Laboratorio: Costruzione dell'ellisse con parallelogrammi articolati

*“Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.”*

(Commissione U.M.I., 2003)

In quest'ottica si inserisce a pieno titolo l'utilizzo didattico delle cosiddette *macchine matematiche*, ossia strumenti costruiti con materiale povero, principalmente legno, utili per mostrare le proprietà geometriche di alcune figure, mediante una manipolazione concreta e continua degli strumenti stessi. Una macchina matematica ha infatti lo scopo di obbligare un punto, un segmento, una figura (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili e tangibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge. Esempi di macchine matematiche sono i tracciatori di curve, i pantografi, i prospettografi. Navigando sul Web sono venuta anche a conoscenza del fatto che vi è una vasta collezione di macchine matematiche per la didattica all'interno di un laboratorio apposito del Dipartimento di Matematica di Modena.

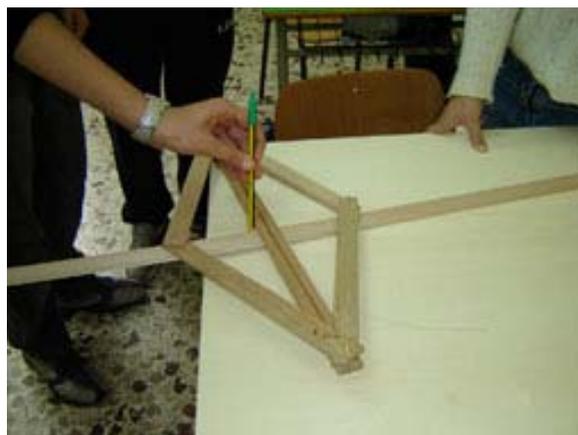
La tradizione delle macchine matematiche non è recente, bensì risale a molti secoli fa. Può dunque essere utile proporre agli allievi alcuni parallelogrammi articolati utili per tracciare ellissi, uno dei quali si fa risalire addirittura a **Leonardo Da Vinci**,



mentre un'altro è noto come ellissografo di **Van Schooten**, in riferimento al matematico olandese che, nel 1646, contribuì allo sviluppo della geometria analitica cartesiana.



Tali parallelogrammi possono alla costruzione e alla rappresentazione della conoscenza. *“Visualizzare ciò che si va apprendendo significa servirsi dell’abilità umana di identificare modelli nelle immagini. (...) Inoltre, consentire di creare, sviluppare e modificare oggetti concreti sviluppa anche quella che Gardner definisce **intelligenza spaziale**.”* (B. Ligorio, o.c., 2003). La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le macchine che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici stessi. In particolare, risulta particolarmente interessante la costruzione che si ottiene utilizzando l'**ellissografo con cerchio direttore**, che sfrutta direttamente la definizione di ellisse come luogo geometrico.



Tale costruzione può essere anche simulata al calcolatore mediante l'uso di Cabri Géomètre II plus o di Geogebra. Il confronto tra varie procedure per realizzare una medesima costruzione può rappresentare un punto di forza per lo sviluppo di un apprendimento significativo. Durante questa fase dell'U.A. è possibile fornire agli allievi

alcune schede di lavoro per la costruzione degli strumenti suddetti ed il materiale necessario per montarli, premunendosi di predisporlo preventivamente. Quasi tutte le macchine matematiche proposte necessitano infatti di astine in legno con scanalature o piccoli fori che è necessario realizzare prima di portarle in aula. Sulle schede sono anche riportati alcuni spunti di riflessione, per stimolare ed indirizzare l'esplorazione e la scoperta. Esse contengono alcuni quesiti utilizzabili per guidare l'attività degli studenti durante l'esplorazione dei modelli fisici. Il lavoro può essere organizzato in gruppi, in quanto *"le informazioni apprese in contesti collaborativi sono ricordate più a lungo di quelle apprese studiando da soli."* (**Ligorio**, o.c).

## **Laboratorio di matematica**

### **Schede di lavoro per la rappresentazione dell'ellisse con parallelogrammi articolati**

**GRUPPO DI LAVORO .....**

.....

.....

.....

**CLASSE ..... SEZIONE ..... DATA .....**

## Ellissografo che utilizza il cerchio direttore

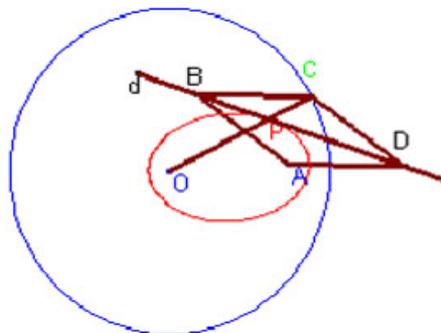
Questo tipo di costruzione permette di rappresentare un'ellisse partendo dalla definizione di luogo geometrico. Esso è detto ellissografo con cerchio direttore, in quanto la determinazione dell'ellisse è strettamente legata alla creazione di una circonferenza.

### Materiali:

- Compensato di legno
- Chiodi
- Aste rigide in legno
- Matita con punta scrivente

### Procedura di costruzione e funzionamento:

Il meccanismo è costituito da un'asta girevole attorno ad un punto  $O$ , fissato al piano del modello e da un rombo articolato. L'asta  $OC$  è fissata al piano in  $O$ .  $ABCD$  è un rombo articolato il cui vertice  $A$  è imperniato al piano, mentre il vertice opposto è vincolato al punto  $C$  dell'asta  $OC$  a distanza  $l$  da  $O$  ( $l > OA$ ). Nel vertice  $D$  è posto un cursore scorrevole lungo l'asta mobile  $d$  vincolata al vertice  $B$ . Quando  $C$  descrive la circonferenza  $g$  di centro  $O$  e raggio  $l$ , il punto  $P$  di intersezione di  $OC$  e  $BD$  descrive un'ellisse di fuochi  $O$  ed  $A$  e asse maggiore  $l$ .



**Attività:**

- Montare lo strumento, utilizzando i materiali su elencati
- Usando una punta scrivente, come in figura, osservare la curva che si delinea sul compensato.
- Identificare, nella costruzione, la quantità che si mantiene costante  
.....
- Individuare le proprietà geometriche che caratterizzano il parallelogramma articolato:
  - Cosa rappresenta l'asta BD nei confronti del segmento AC?  
.....
  - Come sono legate tra loro le quantità PA e PC?  
.....
  - Quanto vale la somma OP+PA?  
.....
  - Quale è la curva tracciata da P e perché?  
.....
- Dimostrare, mediante il formalismo matematico, che la figura rappresentata è un'ellisse  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....
- In ogni punto, come risulta la retta BD rispetto alla curva?  
.....  
.....

## Ellissografo di Leonardo da Vinci

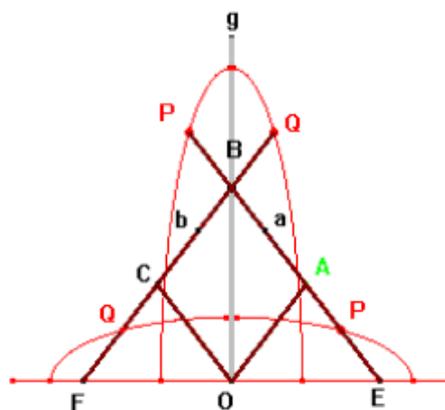
Questo tipo di costruzione permette di rappresentare un'ellisse utilizzando un rombo articolato. Esso viene attribuito a Leonardo da Vinci, e risulta essere una diversa realizzazione tecnica del cosiddetto ellissografo di Proclo.

### Materiali:

- Compensato di legno
- Chiodi
- Aste rigide in legno
- Matite con punte scriventi

### Procedura di costruzione e funzionamento:

Il modello è costituito da un rombo articolato  $OABC$  che ha il vertice  $O$  imperniato al piano del modello e il vertice opposto  $B$  vincolato a scorrere lungo la guida rettilinea  $g$  passante per  $O$ . Muovendo  $B$  lungo  $g$ , si osserva che i punti  $A$  e  $C$  descrivono, insieme, la semicirconferenza di centro  $O$  e raggio  $OA$  mentre ogni altro punto  $P$  dell'asta  $a$  (oppure  $Q$  dell'asta  $b$ ) descrive la quarta parte di una curva. La costruzione è fatta in modo tale che  $AE = CF = OA$ . Inoltre si tenga presente che deve essere  $BE = BF = 2BA$ .



### Attività:

prof.ssa Angela Donatiello – docente di matematica e fisica

- Montare lo strumento, utilizzando i materiali su elencati
- Usando più punte scriventi, come in figura, osservare le curve che si delineano sul compensato
- Individuare la natura di tali curve  
.....
- Riconoscere eventuali simmetrie e, nel caso esse siano simmetrie assiali, indicarne gli assi  
.....  
.....
- Ponendo uguale ad  $\alpha$  l'angolo BEO, e scegliendo come asse dell'ordinate l'asta g e come asse delle ascisse l'asta per E ed F, determinare le coordinate del punto P in funzione di tale angolo.  
.....  
.....  
.....
- Eliminando l'angolo  $\alpha$  da tali coordinate ricavare l'equazione della curva considerata e riconoscerne un'ellisse  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

## Ellissografo di Van Schooten

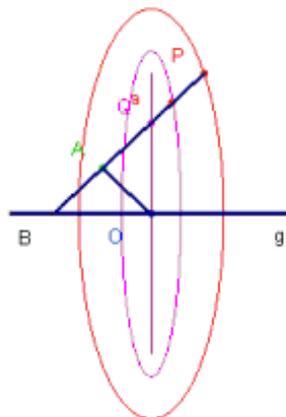
Questo tipo di costruzione permette di rappresentare un'ellisse utilizzando un'asta rigida ed una snodata. Tale ellissografo è attribuito a Van Schooten, un matematico olandese vissuto nel 1600, che contribuì fortemente allo sviluppo della geometria analitica cartesiana.

### Materiali:

- Compensato di legno
- Chiodi
- Aste rigide in legno
- Matita con punta scrivente

### Procedura di costruzione e funzionamento:

La macchina è costituita da un biellismo il cui organo fondamentale è un compasso di Van Schooten ad aste di ugual lunghezza e di apertura variabile che costituiscono un sistema biella-manovella. Una biella permette di trasformare un movimento rotatorio in rettilineo e viceversa. L'asta  $a$  (biella) ha un estremo  $B$  vincolato a percorrere la guida rettilinea  $g$ , mentre l'asta  $OA$  (manovella) imperniata in  $O$  al piano del modello ha l'estremo  $A$  incernierato in un punto dell'asta  $a$ , tale che  $OA=AB$ . Anche questa macchina è un caso particolare dell'ellissografo a barra con guide ortogonali e non differisce sostanzialmente da quello di Proclo.



**Attività:**

- Montare lo strumento, utilizzando i materiali su elencati
- Usando una punta scrivente posta nel punto P, e facendo ruotare la manovella, osservare la curva che ogni punto della biella delinea sul compensato

.....

- Detto A il vertice del compasso. Che figura descrive tale punto, mentre B scorre lungo la scanalatura?

.....

- Posto uguale ad  $\alpha$  l'angolo PBO, e scelte la guida g e l'asta ad essa ortogonale come assi cartesiani, determinare le coordinate del punto P in funzione di tale angolo

.....

.....

.....

.....

- Ricavare l'equazione dell'ellisse rappresentata, individuandone gli assi di simmetria

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Si consiglia anche di consultare il sito dell'Università di Modena,

[http://www.museo.unimo.it/theatrum/machine/lab\\_sez4.htm](http://www.museo.unimo.it/theatrum/machine/lab_sez4.htm)

in particolar modo le pagine dedicate al laboratorio sulle macchine matematiche, in quanto esso presentava anche numerose applet sugli strumenti analizzati di notevole efficacia grafica e didattica.

Riporto l'immagine statica di alcune di esse:

