

OBIETTIVO
DELLA RICERCA
SCIENTIFICA

stabilire se esistono relazioni tra le quantità che si ritengono essenziali per la descrizione di un fenomeno.

MODELLO DEL
FENOMENO
NATURALE

è una costruzione ideale e semplificata rispetto alla realtà, ma che si basa su alcune caratteristiche fondamentali del modo in cui il fenomeno si realizza.

Tali quantità o caratteristiche essenziali di un fenomeno possono essere qualitative o quantitative e vengono dette variabili.

Trovare tali relazioni permette anche di poter effettuare previsioni sull'andamento del fenomeno e sul valore di alcune variabili, al variare delle altre.

Relazioni e funzioni

Siano A e B due insiemi

Si definisce prodotto cartesiano tra A e B (e lo si indica con il simbolo $A \times B$) l'insieme formato da tutte le coppie ordinate (x,y) al variare di x in A e di y in B

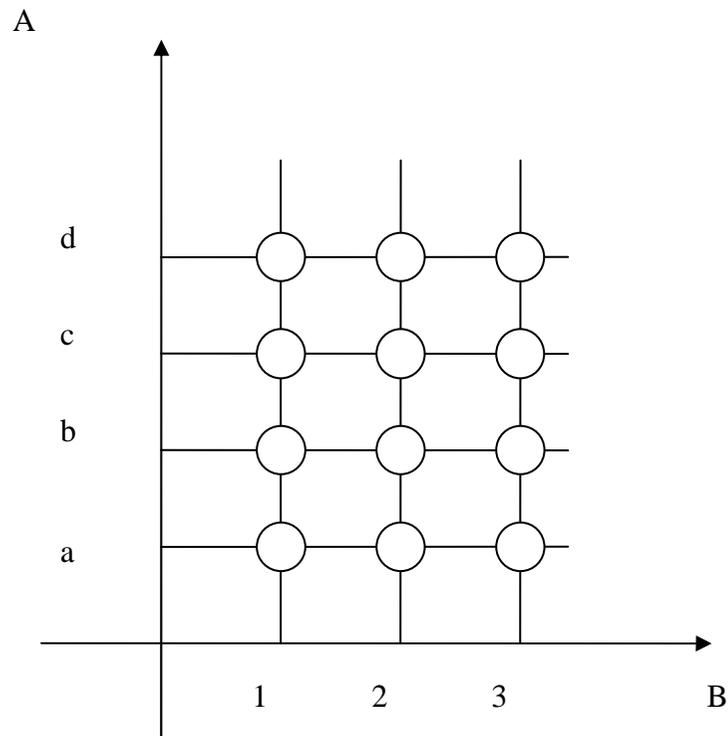
$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Esempio. $A = \{a,b,c,d\}$ $B = \{1,2,3\}$

$A \times B = \{ (a,1); (a,2); (a,3); (b,1); (b,2); (b,3); (c,1); (c,2); (c,3); (d,1); (d,2); (d,3) \}$

Rappresentazione del prodotto cartesiano

Mediante diagramma cartesiano



Mediante tabella a doppia entrata

A x B	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)
d	(d,1)	(d,2)	(d,3)

Una coppia ordinata è tale in quanto conta l'ordine in cui vengono indicati gli elementi.

Una coppia è (a,b) è ordinata $\Leftrightarrow (a,b) \neq (b,a)$

Due coppie ordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono uguali $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

La più nota applicazione degli insiemi prodotto è il **PIANO CARTESIANO**.

Indichiamo con \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali. Per definizione, il piano cartesiano è l'insieme di tutte le coppie ordinate (x,y) con x e y numeri reali.

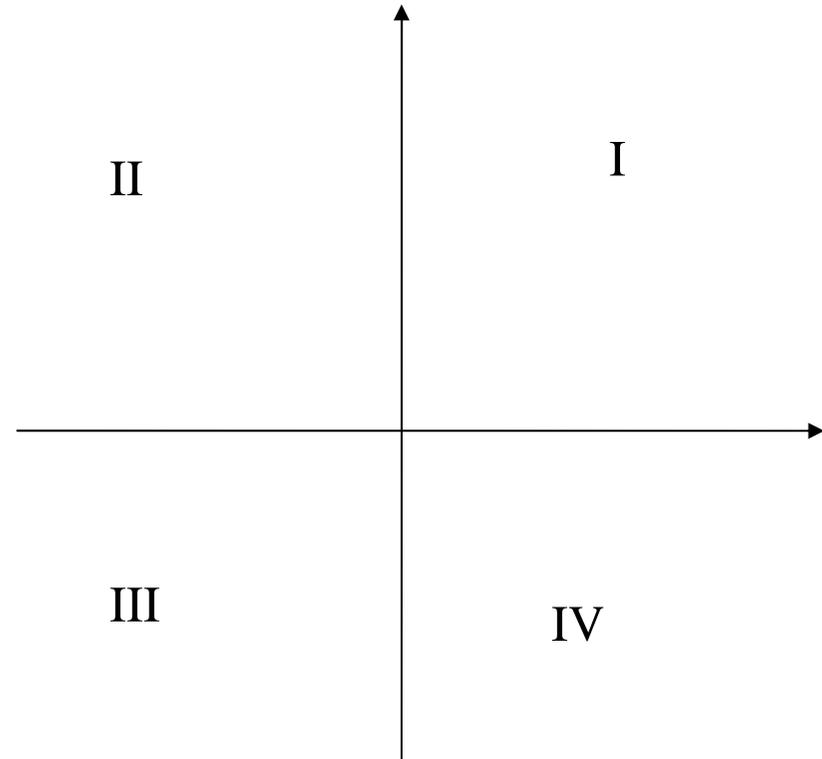
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

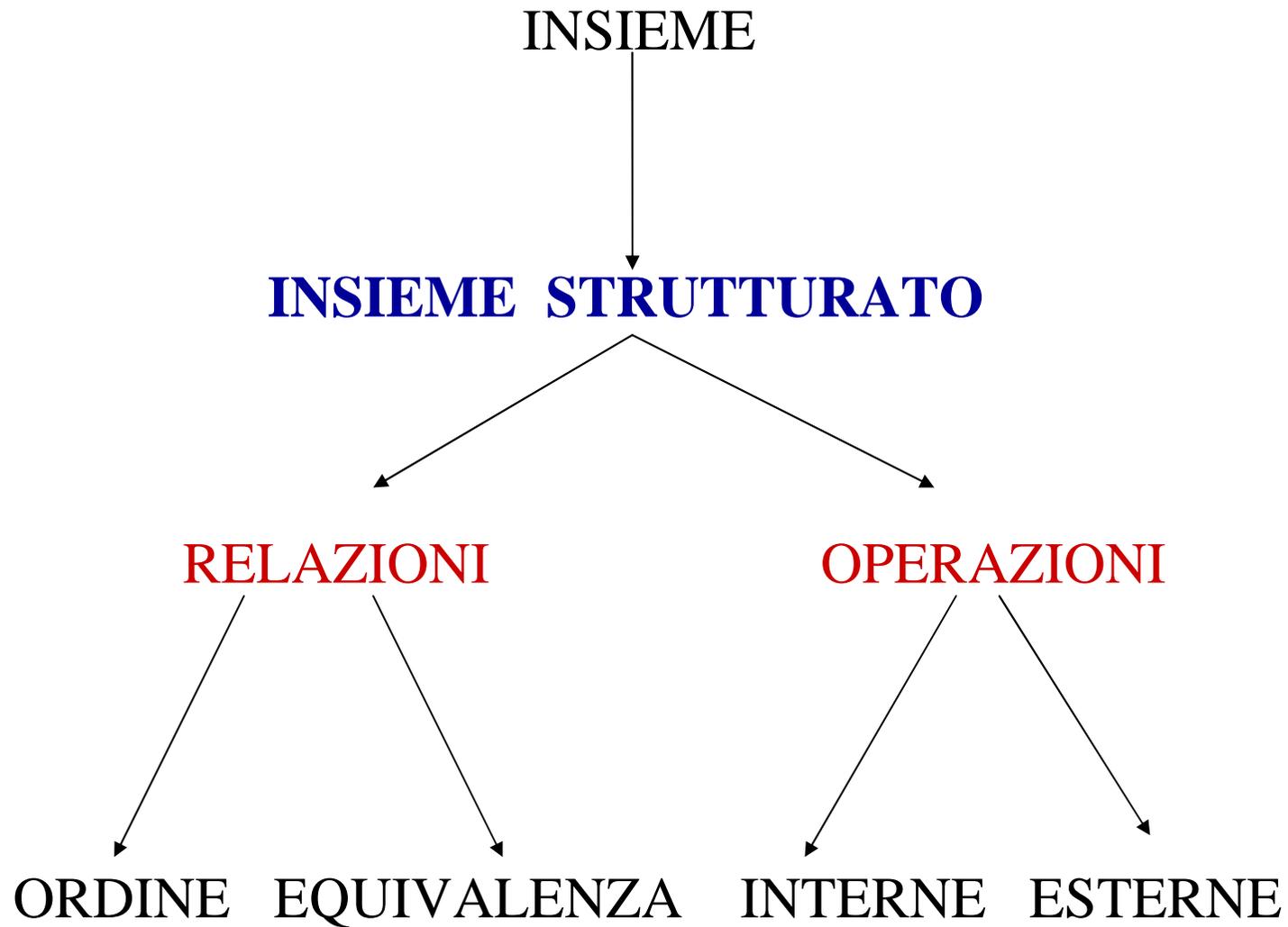
Il primo numero è detto ascissa e il secondo ordinata. Gli assi x e y rappresentano graficamente l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA: $P \in \text{piano} \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

In sintesi: Il piano cartesiano è composto da tutti i punti del piano in corrispondenza biunivoca con tutte le coppie ordinate (x,y) al variare di x e y in \mathbb{R} , ossia da tutti gli elementi dell'insieme prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove \mathbb{R} indica l'insieme dei numeri reali.

I quadrante = $\{(x,y): x > 0, y > 0\}$
II quadrante = $\{(x,y): x < 0, y > 0\}$
III quadrante = $\{(x,y): x < 0, y < 0\}$
IV quadrante = $\{(x,y): x > 0, y < 0\}$





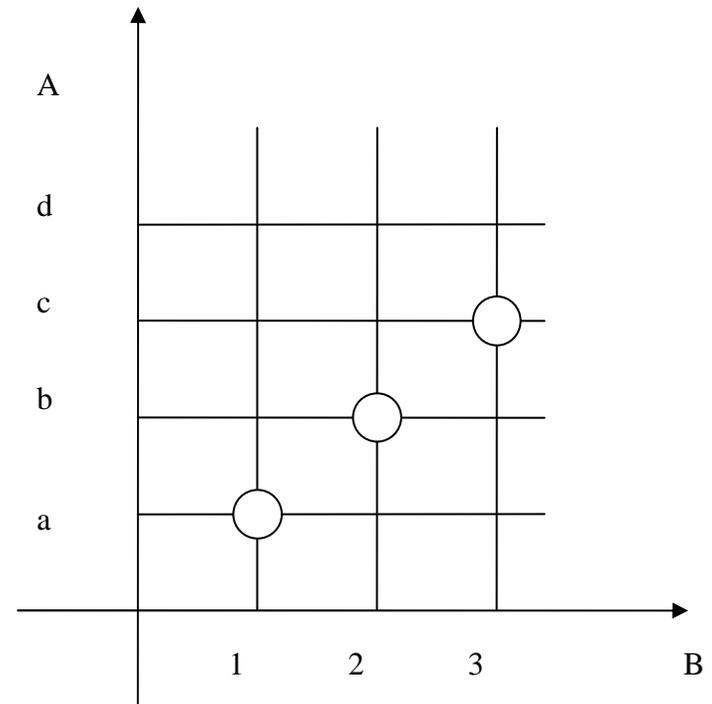
RELAZIONI

DEF. Si definisce RELAZIONE tra due insiemi A e B un qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

$$\mathcal{R} \subset A \times B$$

$$\mathcal{R} = \{(a,1);(b,2);(c,3)\} \subset A \times B$$

$$a \mathcal{R} 1$$



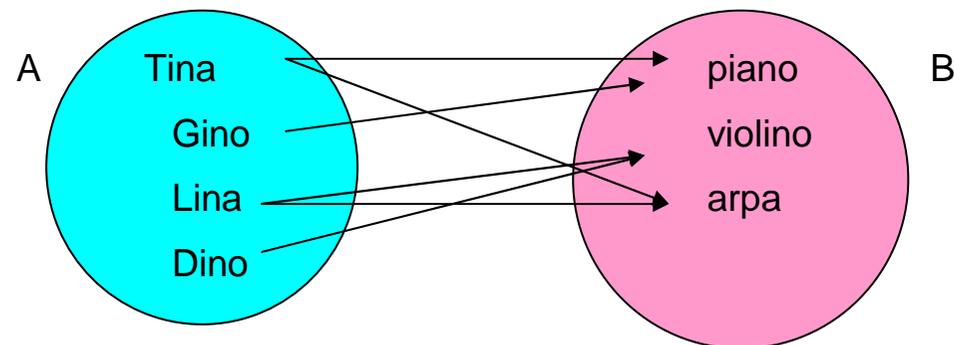
Esempio.

$A = \{\text{Tina, Gino, Lina, Dino}\}$

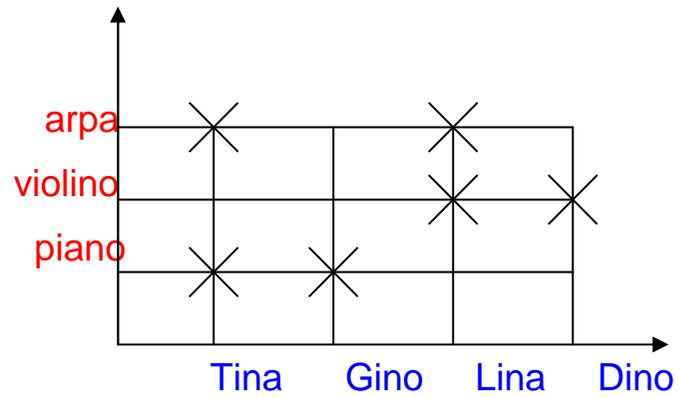
$B = \{\text{piano, violino, arpa}\}$

La relazione che ci interessa rappresentare è: $R = \text{"...suona..."}$

Tale relazione mette in corrispondenza gli elementi dell'insieme A con quelli dell'insieme B. Visualizziamo questa relazione su un diagramma sagittale:



E' dunque possibile rappresentare la relazione precedente mediante un diagramma cartesiano:



Oppure mediante una tabella a doppia entrata:

	Tina	Gino	Lina	Dino
Arpa				
Violino				
piano				

Tina \mathbb{R} arpa

Tina \mathbb{R} violino

Più in generale, considerati due insiemi H e K e stabilita una regola R che permetta di individuare un legame tra gli elementi x del primo insieme e quelli y del secondo, si ha che:

$$(x,y) \text{ sono in relazione } \iff x R y$$

$$(x,y) \text{ non sono in relazione } \iff x \not R y$$

Viene così a formarsi il sottoinsieme G del prodotto cartesiano $H \times K$, costituito da quelle particolari coppie (x,y) di $H \times K$ che soddisfano la relazione espressa. Tale insieme viene definito **grafico** della relazione R, che pertanto sarà indicata con il simbolo $R = (H \times K, G)$.

Secondo la simbologia dell'insiemistica, si può dunque pensare di sintetizzare tale concetto nel seguente modo:

$$x R y : \iff (x,y) \in G$$

$$x \not R y : \iff (x,y) \notin G$$

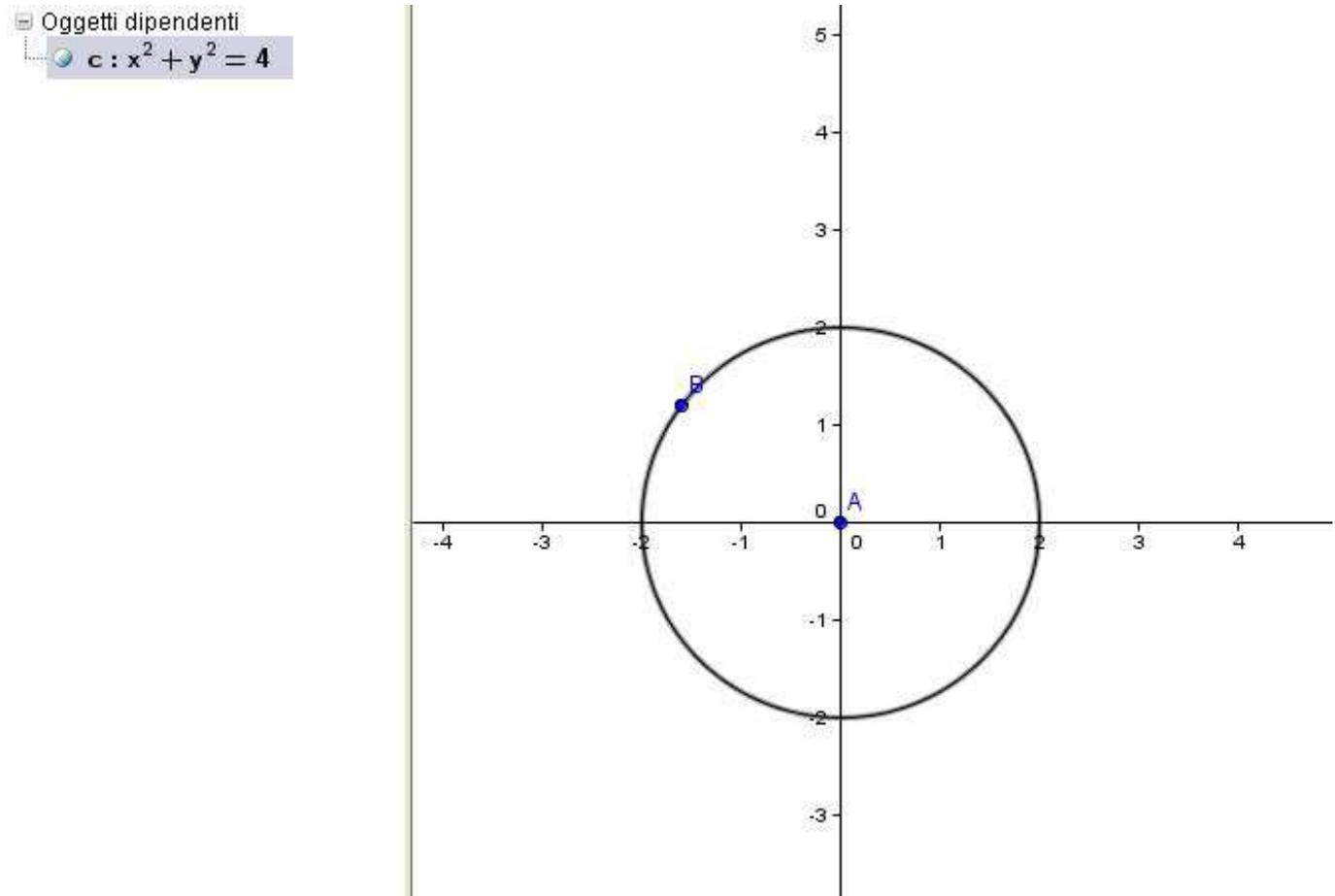
Una relazione può essere determinata da una formula matematica

$$x^2 + y^2 = 4$$

Il cui grafico è:

$$G = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

rappresenta una
circonferenza con
centro nell'origine
degli assi e raggio 2.

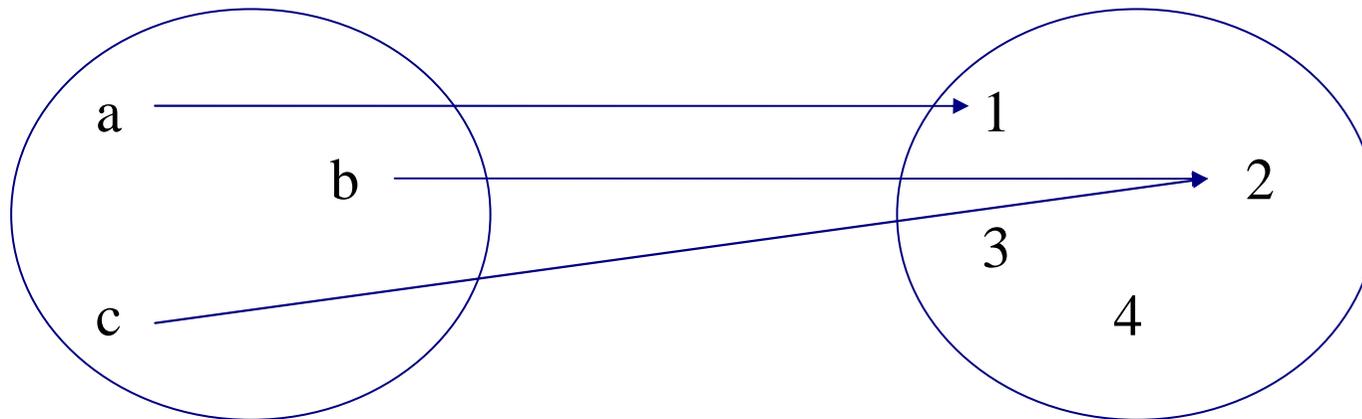


FUNZIONE

DEF. Siano A e B insiemi. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è una relazione tra A e B che **ad ogni** elemento di A associa **uno e un solo** elemento di B .

In simboli matematici:

$f : A \rightarrow B$ è una funzione di A in B $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists ! y \in B \mid y = f(x)$



$x =$ VARIABILE INDIPENDENTE

$y =$ VARIABILE DIPENDENTE

DEF. Si definisce DOMINIO della funzione l'insieme dei valori *assunti dalla variabile x*

DEF. Si definisce CODOMINIO della funzione l'insieme dei valori *assunti dalla funzione*, ossia l'insieme delle y di B che vengono associati a ciascun x di A . Gli elementi y associati a ciascun elemento x di A vengono dette immagini di x .

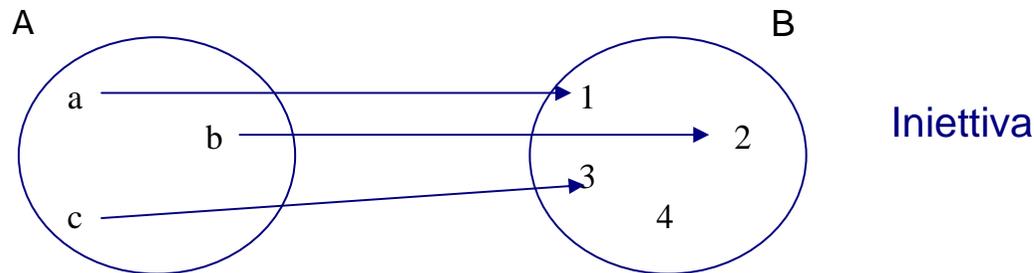
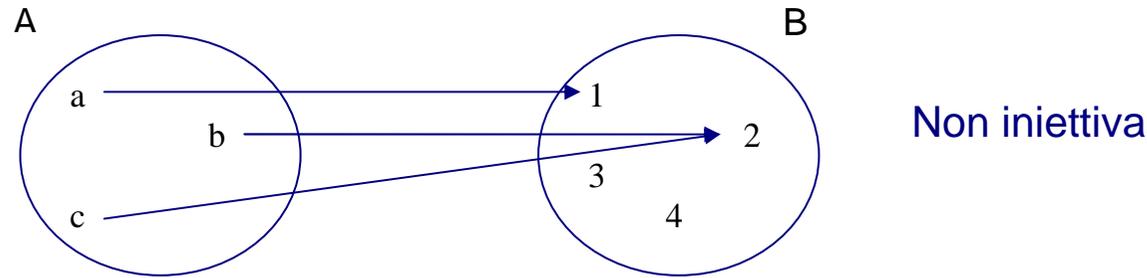
Il CODOMINIO è detto anche INSIEME DELLE IMMAGINI di una funzione.

$$C = f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

GRAFICO della funzione f :

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

DEF. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta **INIETTIVA** se e solo se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A



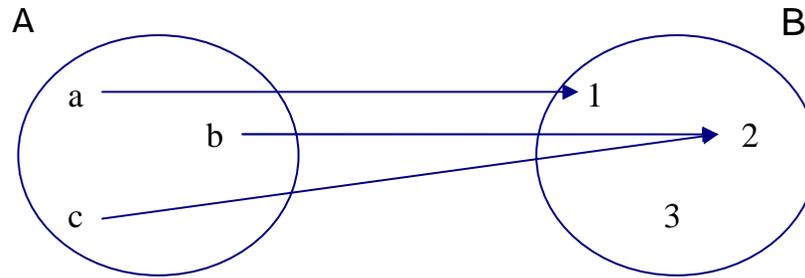
In simboli:

$f : A \rightarrow B$ è una
funzione iniettiva

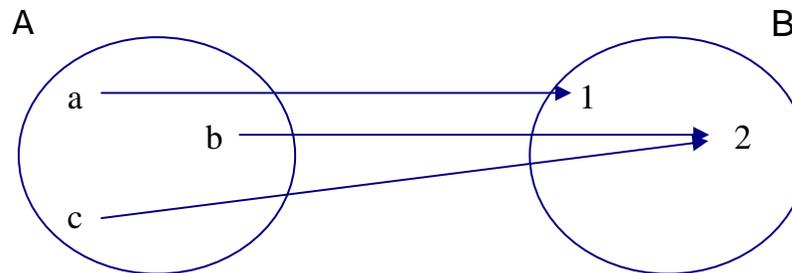
$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

DEF. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta **SURIETTIVA** se e solo se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A



Non suriettiva



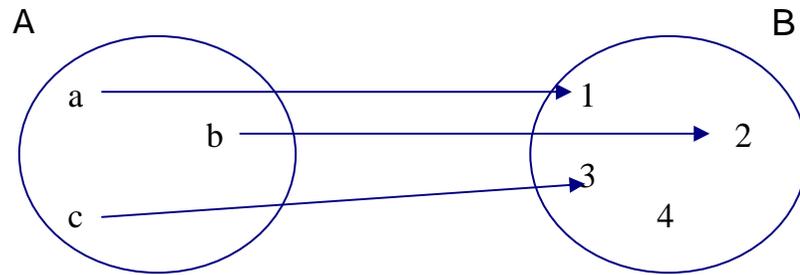
Suriettiva $f(A) = B$

In simboli:

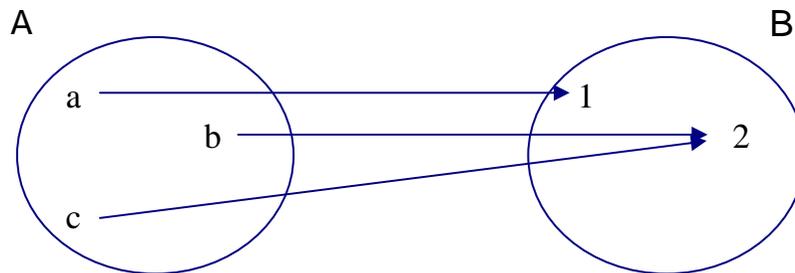
$f : A \rightarrow B$ è una
funzione suriettiva

$$\Leftrightarrow \forall y \in B \exists x \in A \mid y = f(x)$$

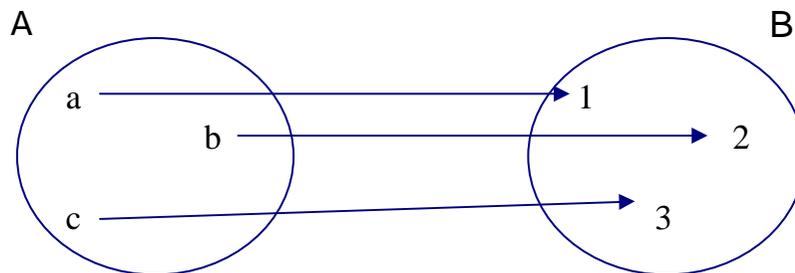
DEF. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta BIETTIVA o BIUNIVOCA se e solo se è sia iniettiva che suriettiva



Iniettiva ma non suriettiva



Suriettiva ma non iniettiva



Biettiva o biunivoca

Se A e B sono entrambi sottoinsiemi dell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, allora si parlerà di funzione reale di variabile reale.

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ è
una funzione reale di
variabile reale di A in B $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists ! y \in B \mid y = f(x)$

Il grafico di una funzione reale di variabile reale è l'insieme delle coppie ordinate $(x, f(x))$ rappresentate da punti del piano cartesiano.

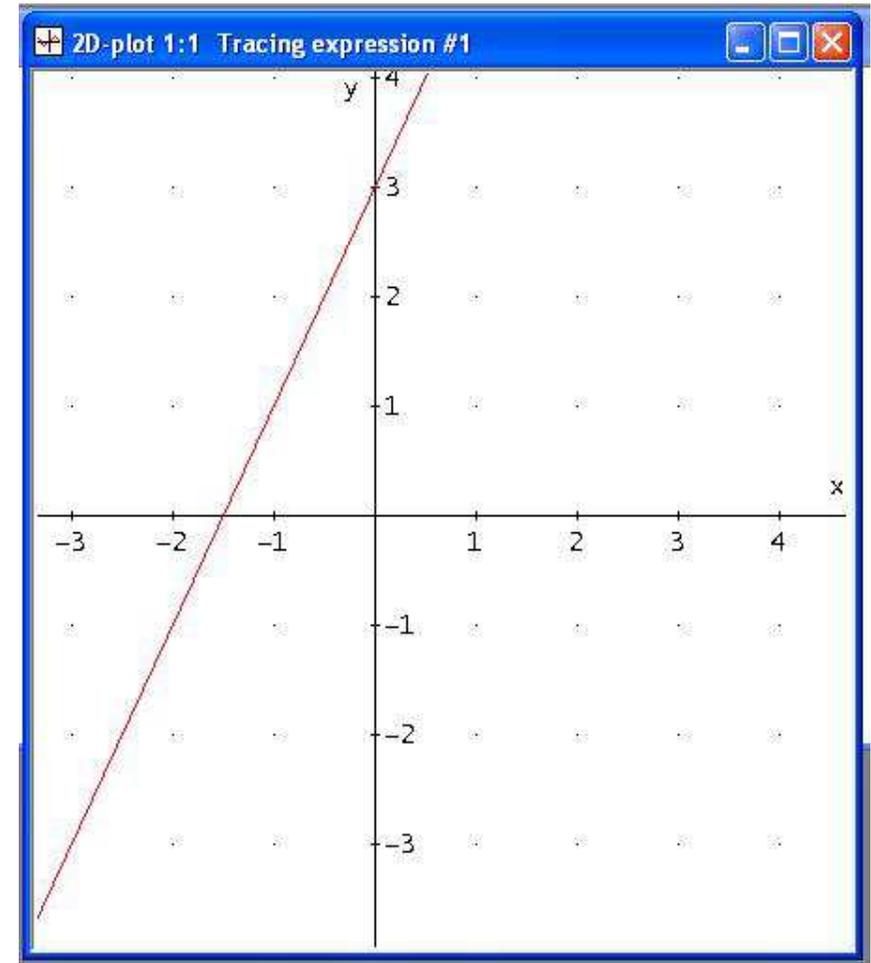
Tali punti possono essere infiniti, pertanto il grafico della funzione sarà rappresentato da una curva sul piano cartesiano. Tutti i punti di tale curva soddisfano la funzione considerata, ossia sono coppie $(x, f(x))$ del grafico di f .

Esempio.

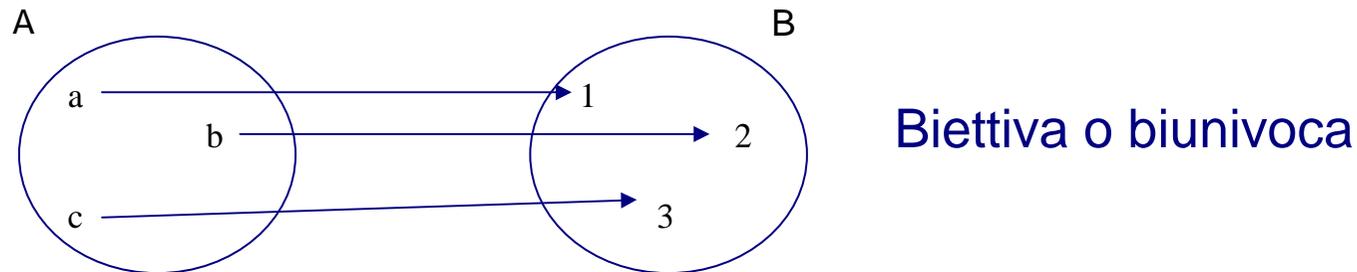
$$\text{Sia } f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + 3 \in \mathbb{R}$$

Essa può essere anche più semplicemente espressa mediante l'equazione $y = 2x + 3$ il cui grafico nel piano cartesiano è una retta.

Tale funzione è detta funzione
LINEARE



Due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità se e solo se esiste una funzione biettiva di A in B.



$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B \text{ biettiva}$$

Nel caso di insiemi finiti, la cardinalità di un insieme indica il numero dei suoi elementi, mentre per insiemi infiniti può accadere che insiemi siano equipotenti ad un loro sottoinsieme proprio, ossia che abbiano la stessa cardinalità di un sottoinsieme strettamente contenuto in esso.

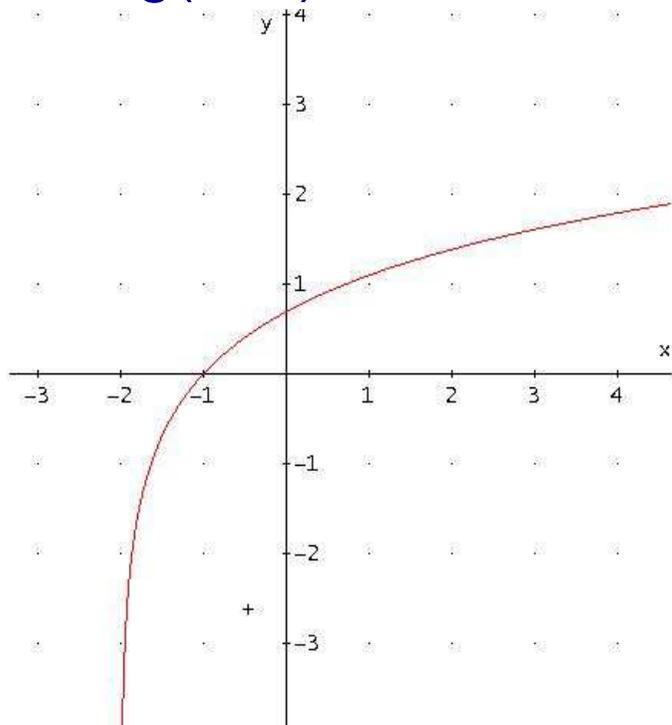
PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

Sia $f : x \in D \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in C \subseteq \mathbb{R}$

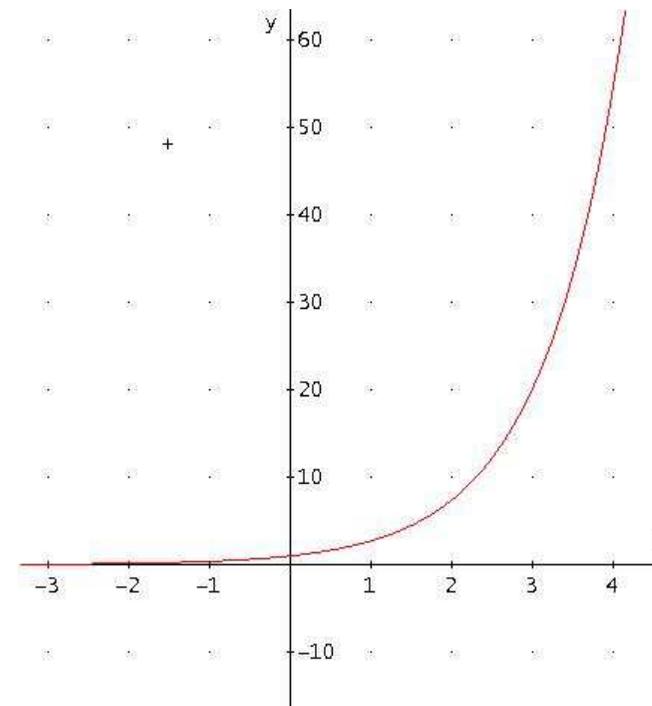
La funzione si dice
crescente in senso stretto

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$y = \log(x+2)$



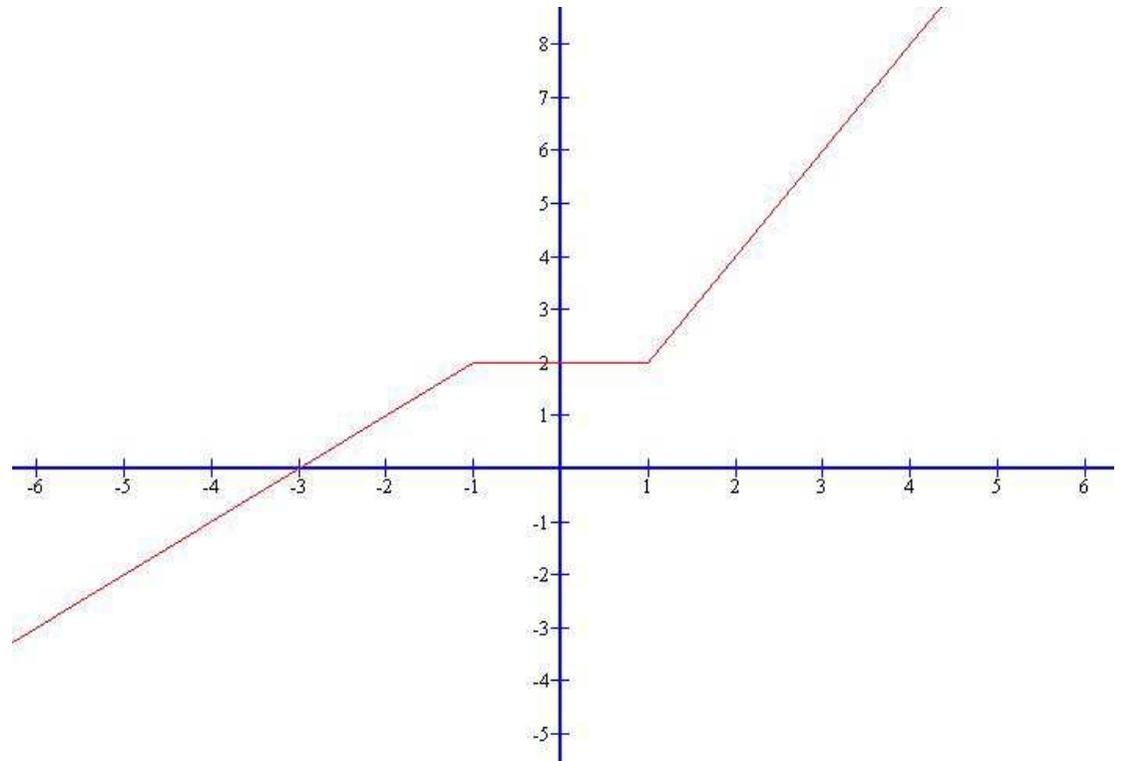
$y = e^x$



La funzione si dice crescente in senso lato o non decrescente \Leftrightarrow

$$\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ x + 3 & x < -1 \end{cases}$$

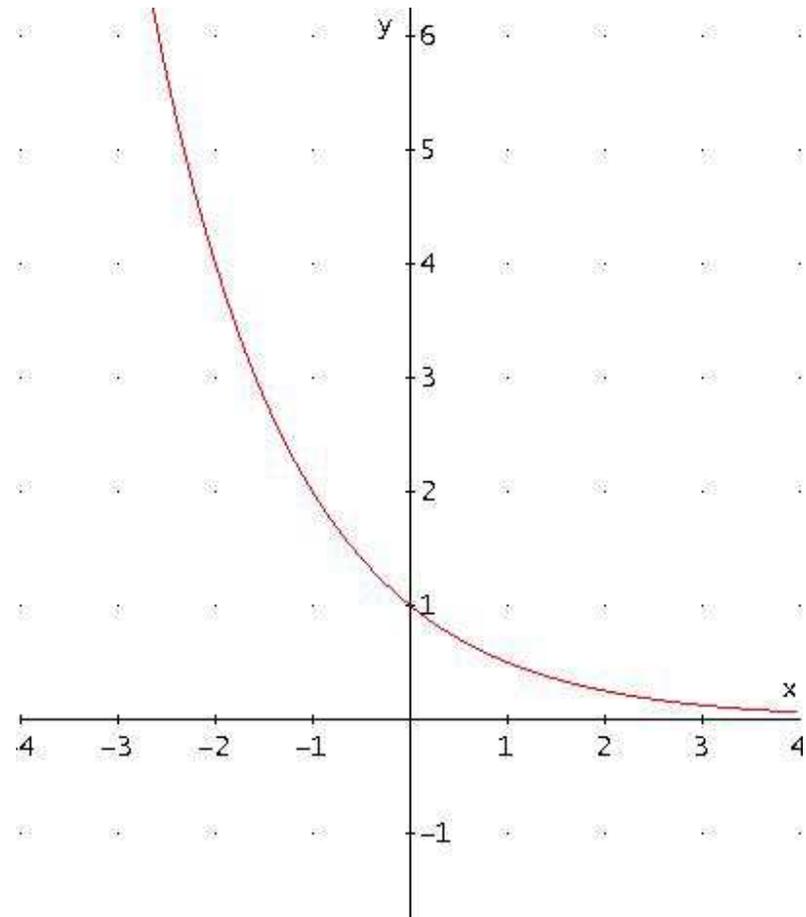


La funzione si dice
decrescente in senso stretto

\Leftrightarrow

$$\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

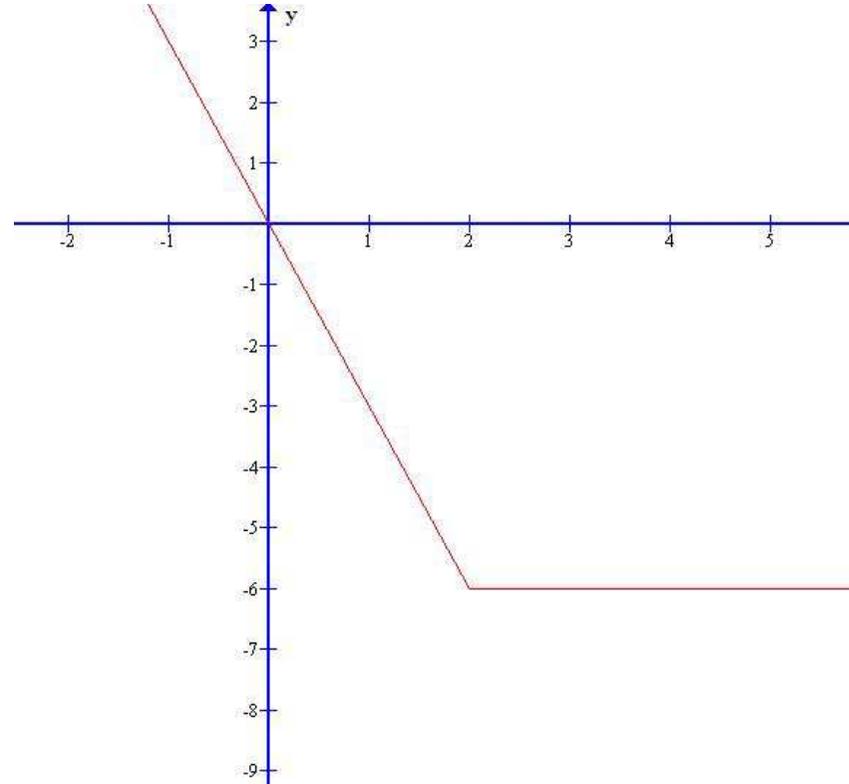


La funzione si dice decrescente in senso lato o non crescente

\Leftrightarrow

$$\forall x_1, x_2 \in D \text{ con } x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$y = \begin{cases} -3x & x \leq 2 \\ -6 & x > 2 \end{cases}$$



Le funzioni non decrescenti o non crescenti si dicono monotòne.

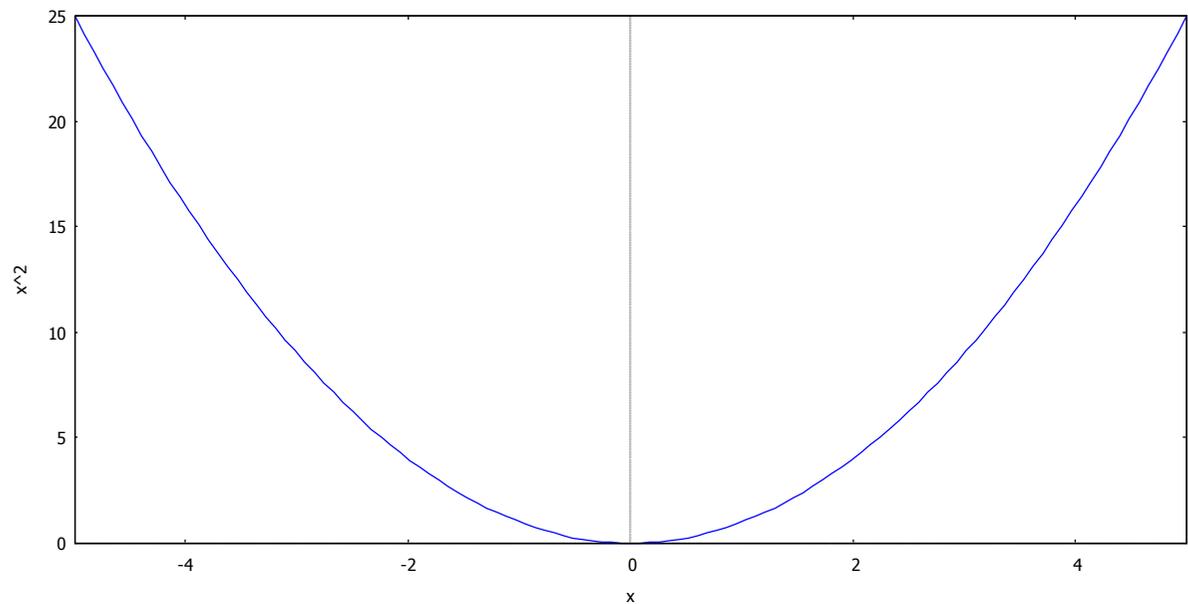
In particolare le funzioni decrescenti in senso stretto o crescenti in senso stretto si dicono monotòne in senso stretto.

Sia $f : x \in D \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in C \subseteq \mathbb{R}$

La funzione si definisce PARI \Leftrightarrow 1) $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
2) $f(-x) = f(x)$

$y = x^2$
parabola con vertice
nell'origine degli assi

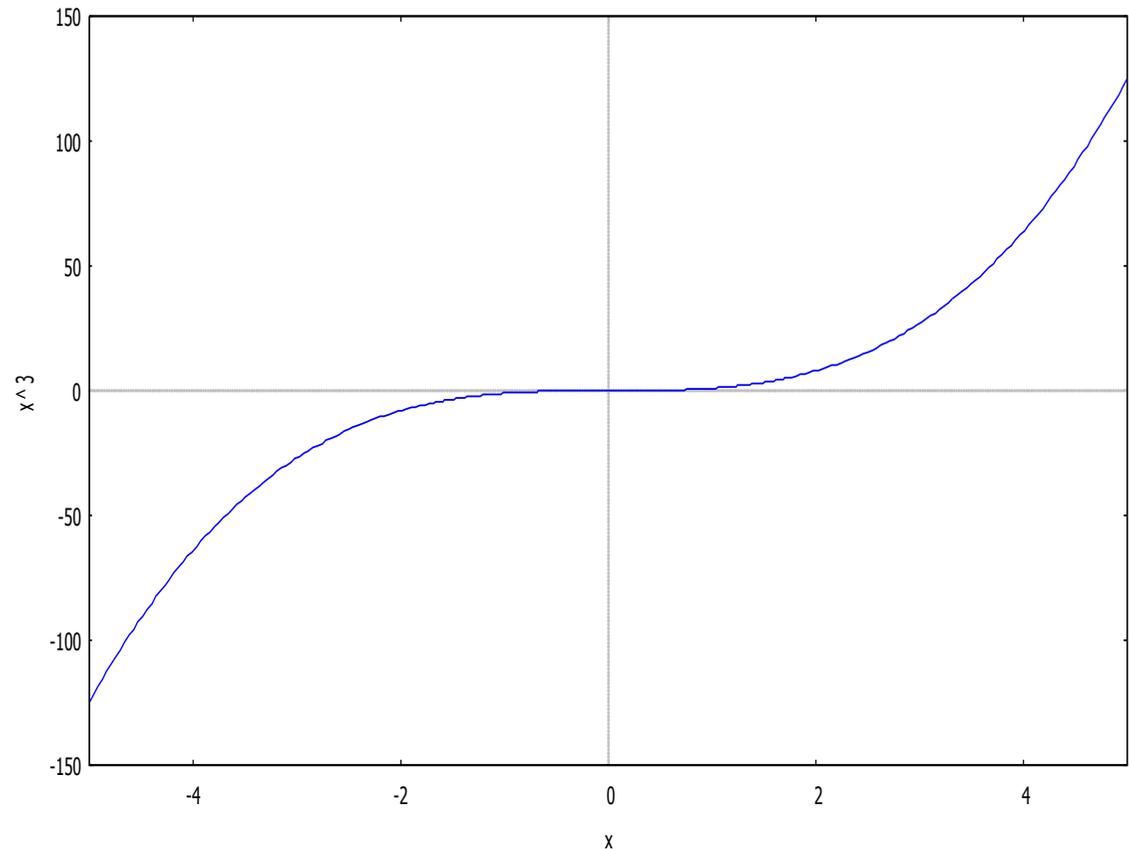
grafico simmetrico
rispetto
all'asse y



La funzione si definisce DISPARI \Leftrightarrow 1) $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
2) $f(-x) = -f(x)$

$y = x^3$
funzione cubica

grafico simmetrico rispetto
all'origine degli assi



Esempio: $y = x^3 - x$

Sia $f : x \in D \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$

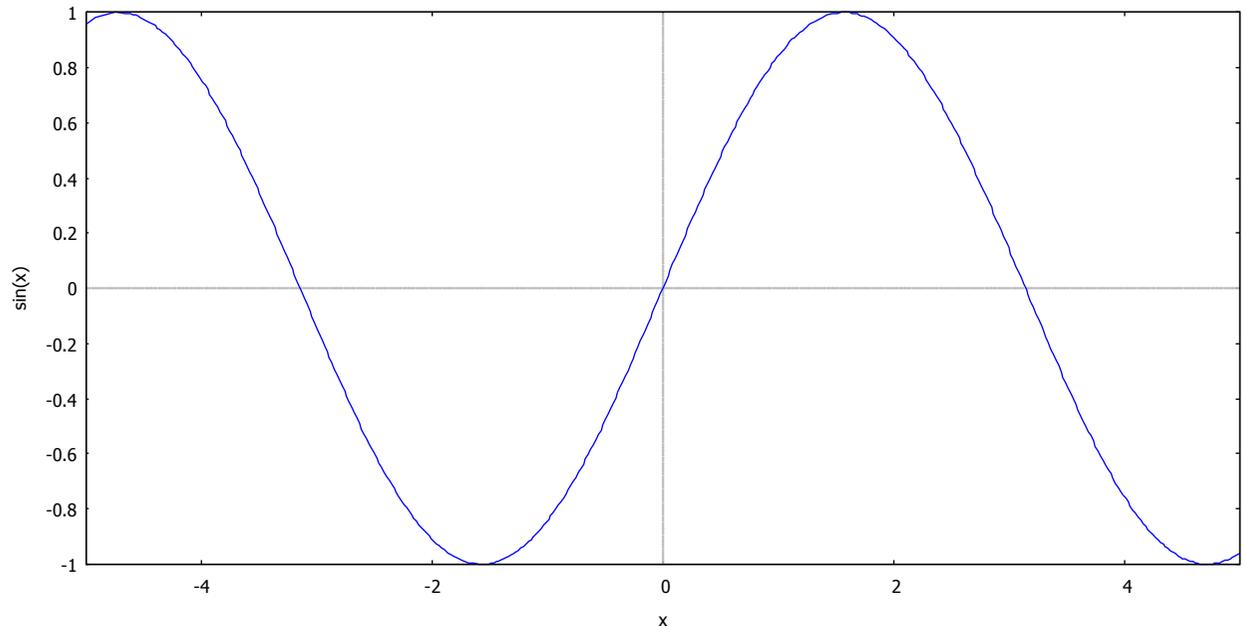
La funzione si definisce
PERIODICA

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists T > 0 | \\ 1) \forall x \in D \Rightarrow x + T \in D \\ 2) f(x + T) = f(x) \end{array}$$

Il più piccolo dei numeri T per cui vale tale proprietà è detto **PERIODO** della funzione f .

$y = \text{sen } x$

periodica di periodo
 $T = 2\pi$



Date le funzioni $f : x \in D_f \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in C \subseteq \mathbb{R}$
 $g : x \in D_g \subseteq \mathbb{R} \mapsto g(x) \in C \subseteq \mathbb{R}$

La funzione g è detta una RESTRIZIONE della funzione f o f è detta PROLUNGAMENTO della funzione g

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) D_g \subset D_f \\ 2) \forall x \in D_g \quad g(x) = f(x) \end{array}$$

Esempio. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+2}{x}}$ $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

OSS. Due funzioni sono UGUALI se e solo se

- 1) Hanno stesso DOMINIO
- 2) Hanno stesso CODOMINIO
- 3) Hanno lo stesso GRAFICO

$$D_f: \frac{x+2}{x} \geq 0$$

$$x \leq -2 \vee x > 0$$

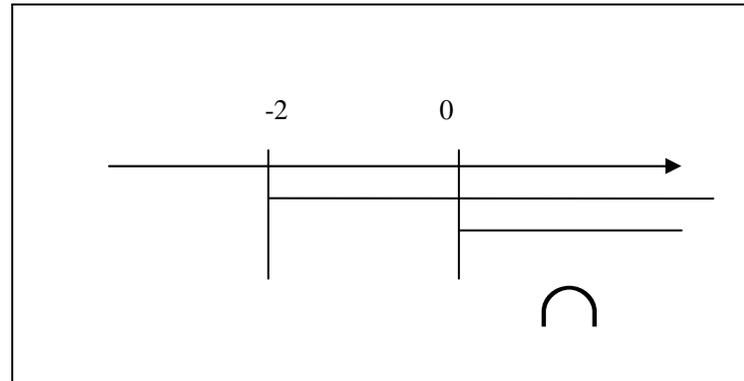
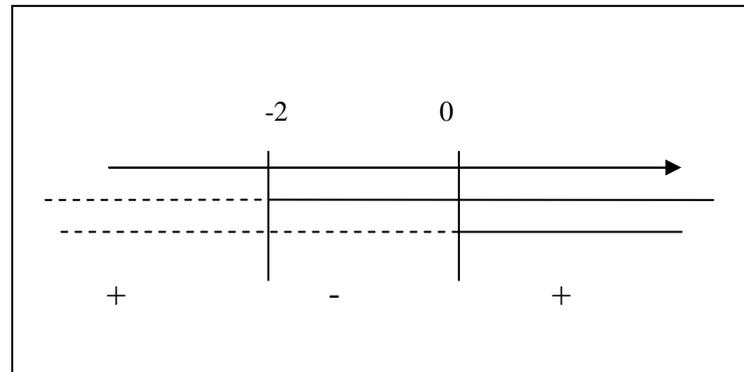
$$D_f =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$$

$$D_g: \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$D_g =]0, +\infty[$$

$$N: x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$D: x > 0$$



Le due funzioni coincidono solo per $x > 0$, in quanto nell'altro intervallo la funzione g non è definita: g è una restrizione della f .

Sia $f : x \in D_f \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(x) \in C \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce CONTROIMMAGINE dell'elemento y mediante f l'insieme di tutti gli elementi x del dominio tale che y è immagine della x .

$$f^{-1}(y) = \{x \in D \mid y = f(x)\}$$

Si definisce CONTROIMMAGINE di C

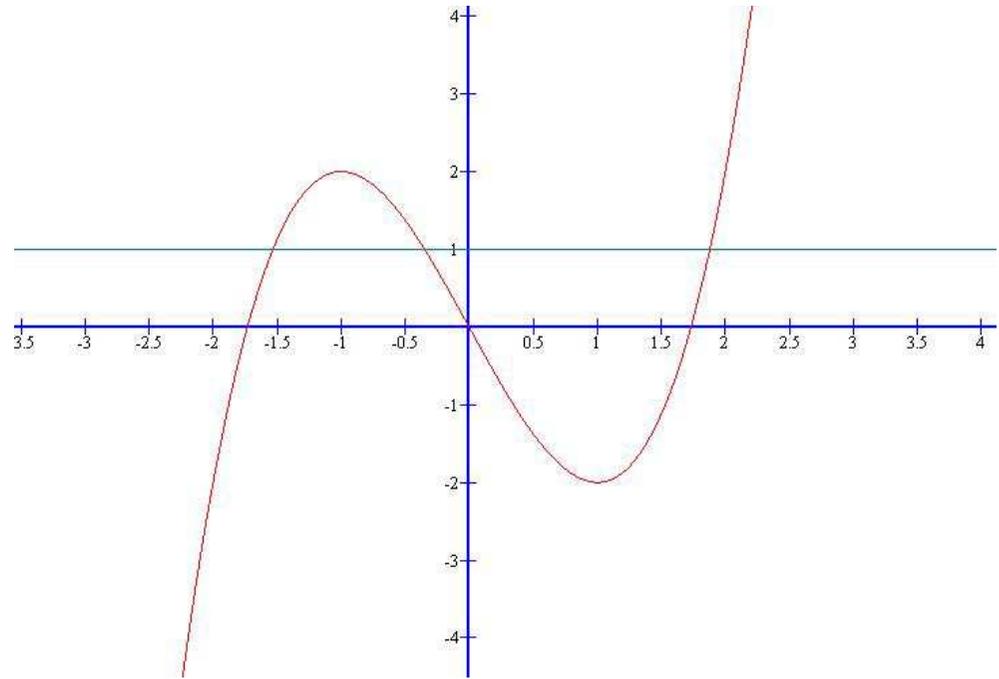
$$f^{-1}(C) = \{x \in D \mid f(x) \in C\}$$

Nota: non si confonda la notazione $f^{-1}(y)$ con $1/f(y)$ (reciproco o inverso)

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $f(x) = y_0$, con y_0 dato e x incognita, abbia soluzioni è che y_0 appartenga al codominio.

In questo caso l'equazione $f(x)=y_0$ ha tre soluzioni, in quanto la retta $y = y_0$ interseca tre volte la curva.

Tale funzione non è iniettiva, poiché a valori distinti della x corrisponde lo stesso valore della funzione.



f è INVERTIBILE \iff f è biettiva

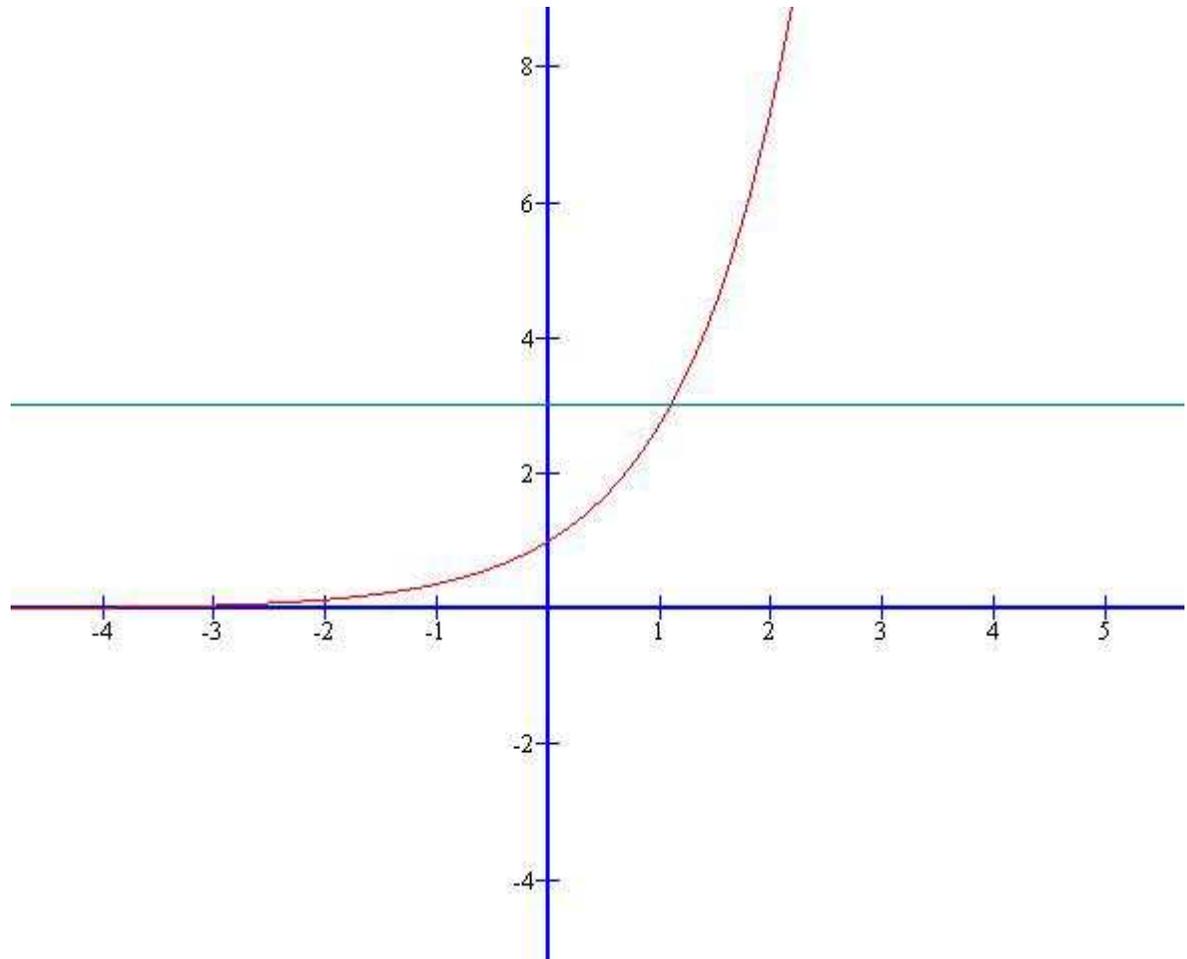
Ossia, una funzione è invertibile se e solo se l'equazione $f(x) = y_0$ ammette una e una sola soluzione, ovvero se e solo se $\forall y \in C \exists ! x \in D \mid y = f(x)$

Una classe importante di funzioni invertibili è data dalle funzioni monotone in senso stretto.

In questo caso ogni retta parallela all'asse x intersecherà la curva in un solo punto.

Quindi:

$$\forall y \in C \quad \exists! x \in D \mid y = f(x)$$



Se la funzione è invertibile \Rightarrow è possibile definire la funzione inversa

$$f^{-1} : y \in C \mapsto x = f^{-1}(y) \in D \mid y = f(x)$$

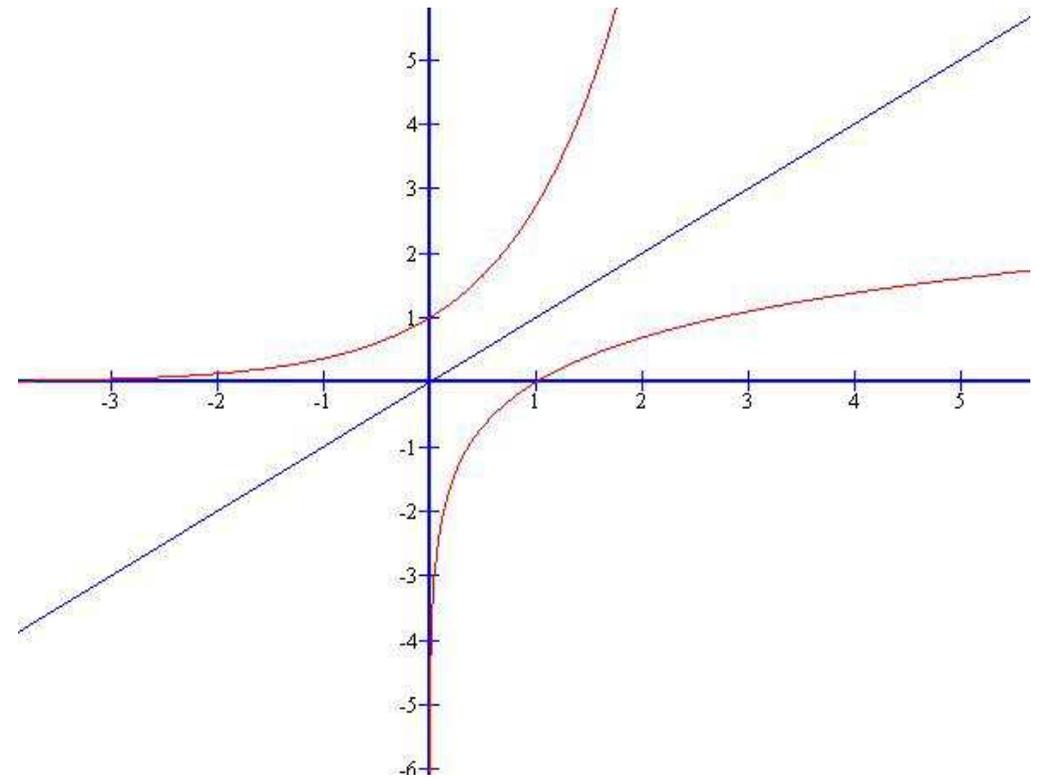
$$D' = C$$

$$C' = D$$

Una funzione e la sua inversa hanno il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

$$y = e^x$$

$$y = \ln x$$



Funzioni composte

Si consideri la funzione $y = \sqrt{3x + 2}$. Essa nasce dalla composizione di due funzioni

$$x \mapsto 3x + 2 \mapsto \sqrt{3x + 2}$$

Naturalmente tale esempio evidenzia alcuni limiti evidenti: per poter comporre le due funzioni è necessario che il valore assunto dalla prima funzione sia un numero sul quale risulti calcolabile il valore assunto dalla seconda funzione.

Se alla x si associasse il valore -6 , si avrebbe $3(-6)+2 = -16$, ma non esiste la radice quadrata di -16 .

In generale, due funzioni

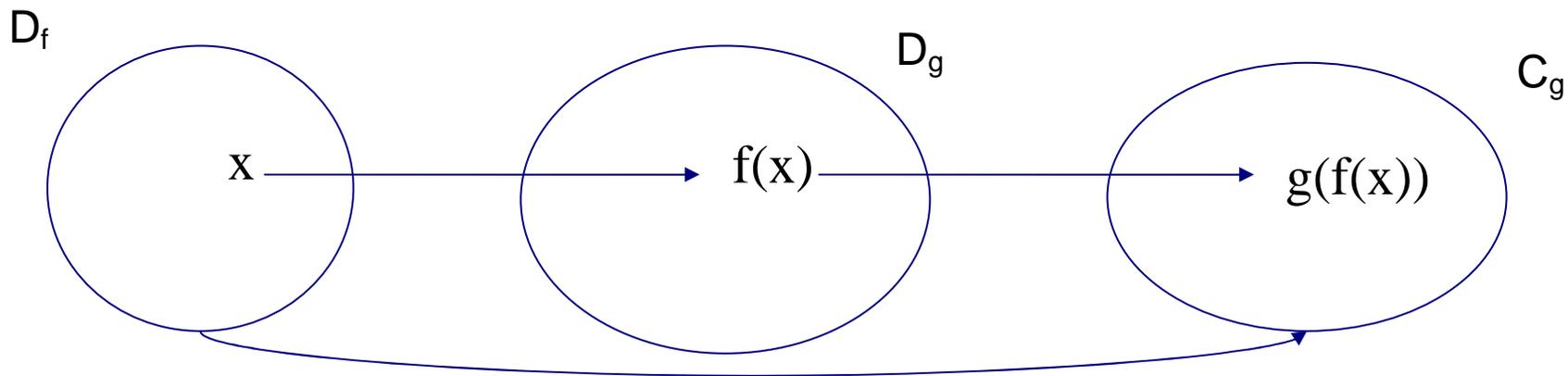
$$f : D_f \rightarrow C_f$$

$$g : D_g \rightarrow C_g$$

sono componibili se il codominio della prima è contenuto nel dominio della seconda, ossia se $C_f \subseteq D_g$

Si definisce in tal caso una nuova funzione

$$h = g \circ f : x \in D_f \mapsto g(f(x)) \in C_g$$



OSS. Nel caso in cui si volessero comporre due funzioni f e g per cui non si verifica che $C_f \subseteq D_g$, allora bisognerà scegliere un sottoinsieme $D'_f \subseteq D_f$ in modo da determinare, mediante la funzione f , per ogni $x \in D'_f$, valori di $f(x) \in D_g$ nei quali sia possibile calcolare la seconda funzione g .

Esempio. $h : x \mapsto \log(2 - \sqrt{x + 2})$

h è una funzione composta mediante le funzioni:

$$f : x \mapsto 2 - \sqrt{x + 2}$$

$$g : t \mapsto \log t$$

$$D_h : \begin{cases} 2 - \sqrt{x + 2} > 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

OSS. La composizione di funzioni non è commutativa

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Esempio.

$$f : x \mapsto 2x + 1$$

$$g : x \mapsto x^2$$

$$g \circ f : x \mapsto 2x + 1 \mapsto (2x + 1)^2$$

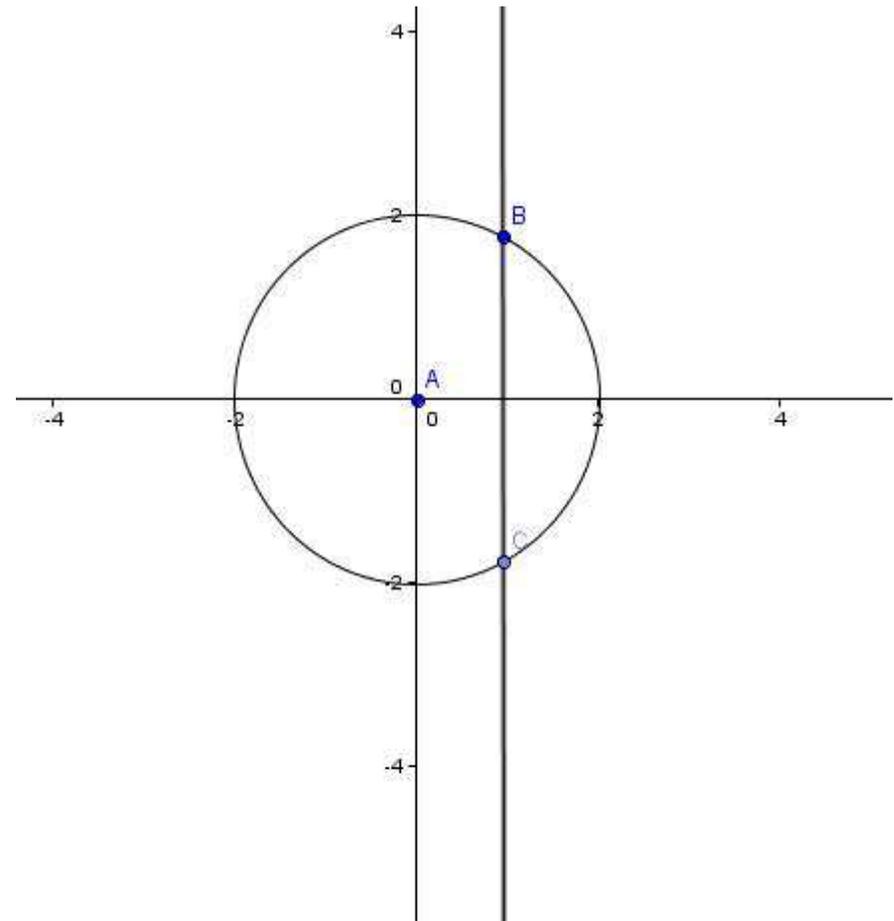
$$f \circ g : x \mapsto x^2 \mapsto 2x^2 + 1$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

GRAFICI DELLE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

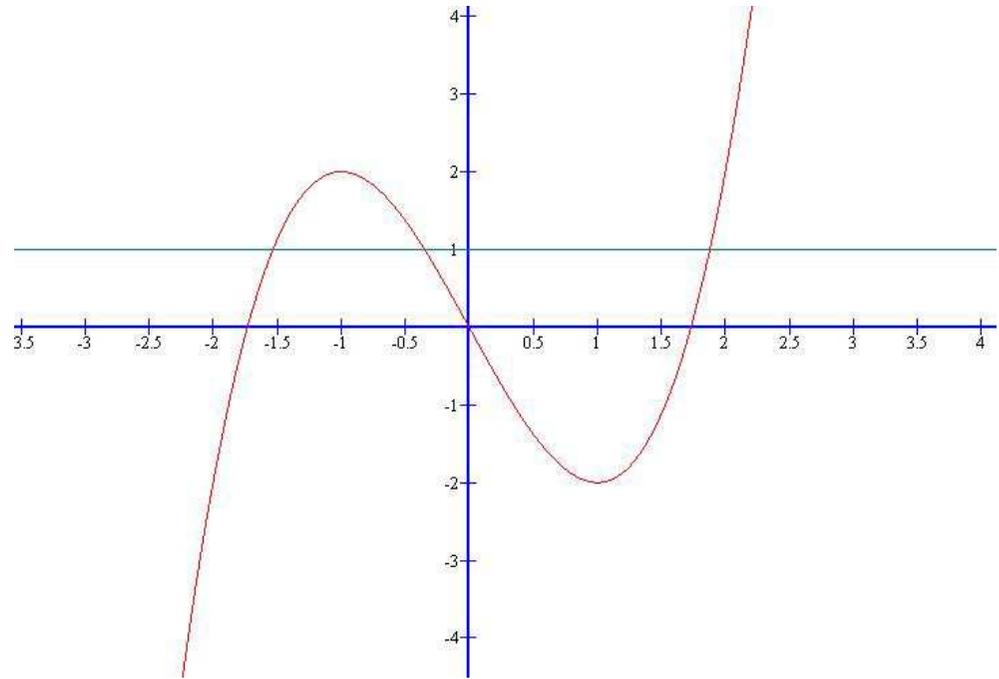
Il grafico della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ **non è una funzione**, in quanto ad ogni elemento x del dominio corrispondono due immagini.

Se si traccia una retta parallela all'asse y , si individuano due intersezioni di tale retta con il grafico della curva.



Il grafico di una funzione interseca una retta $x=h$ in al più un punto

Non è iniettiva in quanto se si traccia una retta parallela all'asse x, si individuano due intersezioni con il grafico della curva



Una funzione iniettiva interseca una retta $y=k$ in al più un punto

Le slides sono reperibili all'indirizzo web:

www.matematicallegra.it

Il programma GRAPH con cui sono stati realizzati i grafici
è scaricabile all'indirizzo:

www.padowan.dk