Lo spazio-tempo di Minkowski

Per meglio comprendere gli effetti relativistici dovuti all’assunzione dei due postulati di Einstein, introduciamo *un utile strumento geometrico* noto con il nome di ***diagramma di Minkowski***.

Minkowski fornì una rappresentazione geometrica che spiegasse in maniera semplice le leggi della relatività.

Minkowski definisce la struttura dello *spazio-tempo* con questa frase:

“*Un punto dello spazio ad un punto del tempo, cioè, un sistema di valori x*, *y*, *z*, *t lo chiamerò un punto dell’universo. La molteplicità di tutti i pensabili sistemi di valori x*, *y*, *z*, *t*, *la battezzeremo universo* ”.

Il *continuum spazio-tempo* così definito è uno spazio matematico a quattro dimensioni senza proprietà fisiche, i cui punti sono definiti *punti-evento*. Il moto degli oggetti è rappresentato da *linee-di-universo*, che uniscono i punti-evento corrispondenti alle coordinate istantanee degli oggetti stessi.

In fisica il concetto fondamentale è quello di evento. Un evento indica una posizione nello spazio-tempo ed è indicato mediante un quadrivettore in cui compaiono sia le coordinate spaziali che quelle temporali (x,y,z,t)

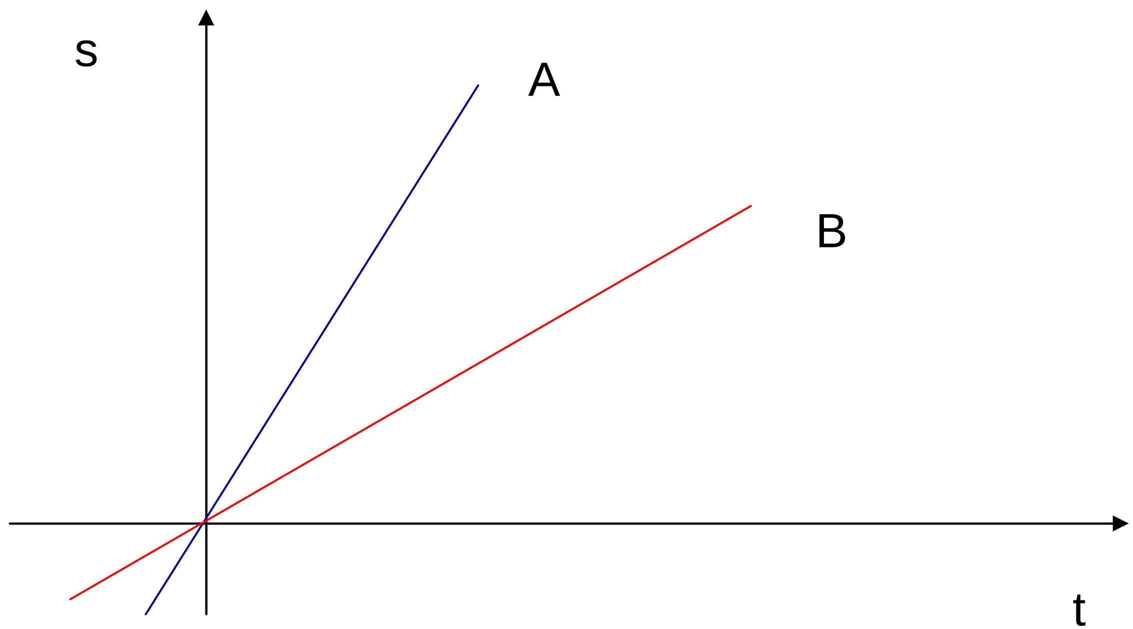
Definizione di quadrivettore:
Nello Spazio di Minkowski un quadrivettore (o tetravettore) è una quadrupla di valori che nelle trasformazioni di coordinate tra due riferimenti inerziali rispetta le Trasformazioni di Lorentz

Spazi e tempi però non sono grandezze omogenee quindi non si possono sommare insieme, per questo le co-ordinate del punto-evento non si scrivono esattamente (x, y, z, t), ma in realtà sono (x, y, z, ct), moltiplicando l'asse dei tempi per la velocità della luce (cosa che ci è permesso fare dato che quest'ultima è assunta essere una costante universale).
E' come se fosse sottinteso c =1 (per maggiore chiarezza nel seguito espliciteremo sempre il fattore c).
In tal modo si possono misurare posizioni e tempi con <u>le stesse unità di misura</u>.

Per ragioni rappresentative, ma senza alcuna perdita di generalità, considerereremo per ora una sola delle dimensioni spaziali, ovvero l'asse spaziale x (così da ricondurre la trattazione ad un problema bidimensionale) e cominceremo col disegnare gli assi x e ct tra loro ortogonali.

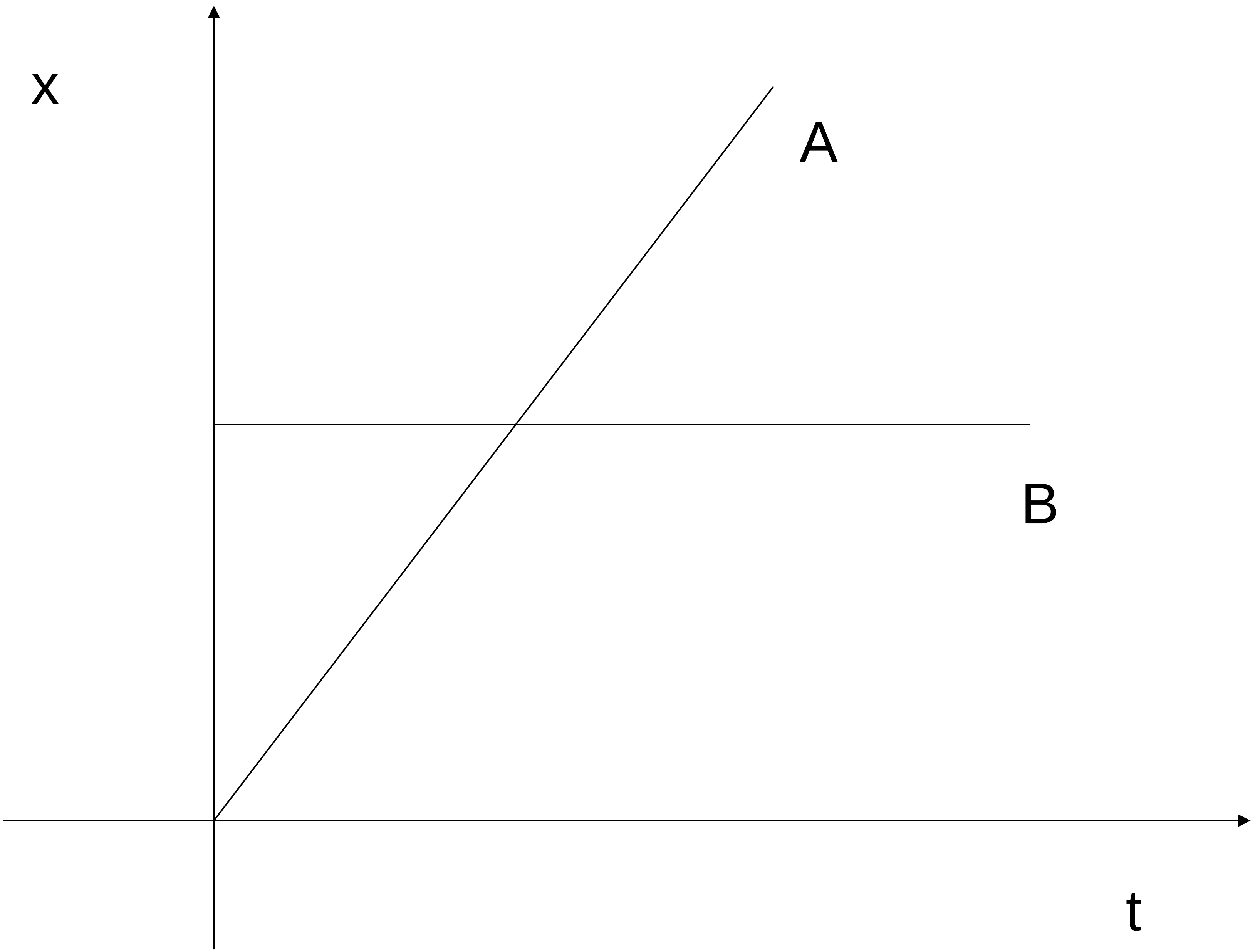
Tale rappresentazione ci è in parte già familiare

Pensiamo infatti alla legge oraria del moto rettilineo uniforme
Sappiamo che essa indica la posizione del corpo in moto in funzione del tempo e che può essere rappresentato in un diagramma spazio – tempo mediante una linea retta passante per l'origine del sistema di riferimento.

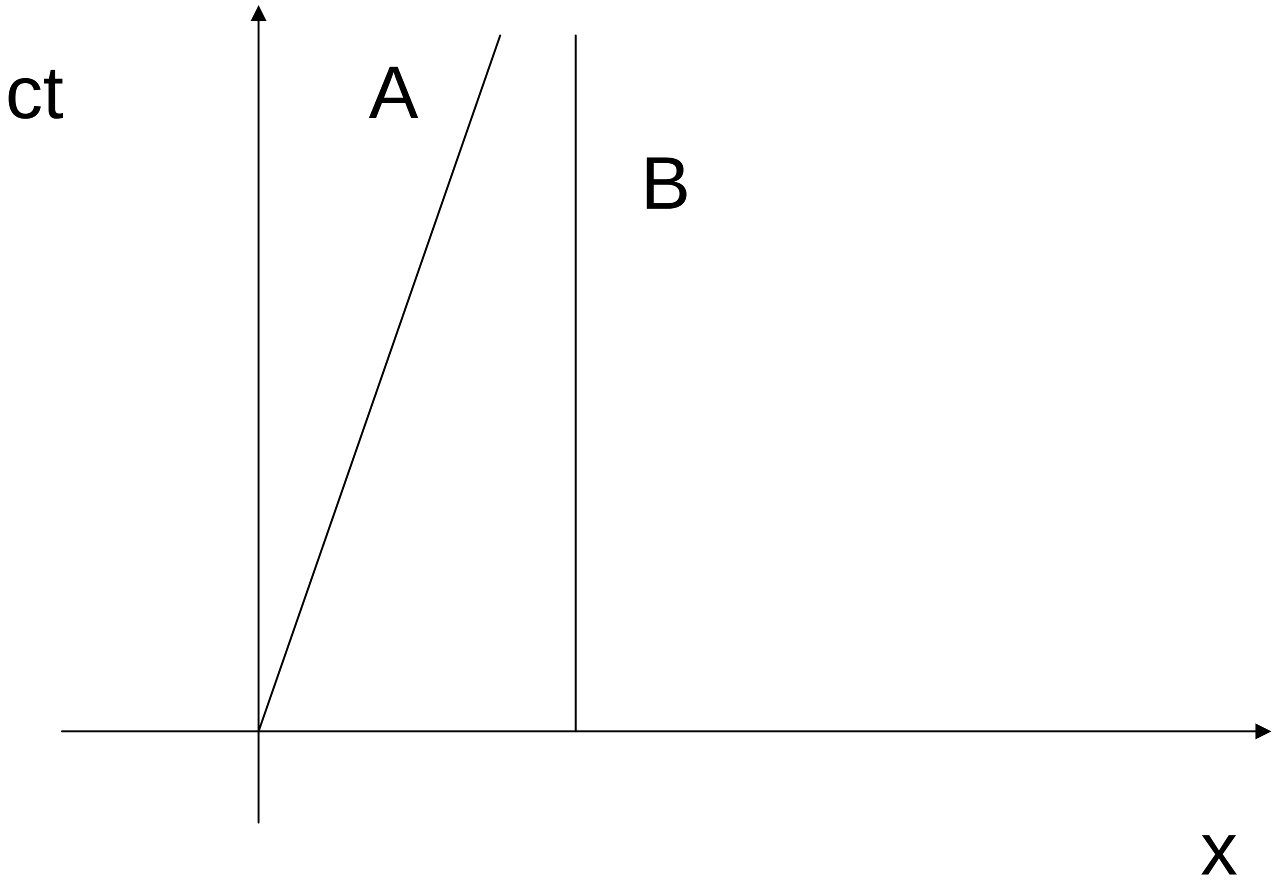


Dal diagramma precedente si può certamente dedurre che il corpo A sia più veloce del corpo B, in quanto la pendenza della retta che indica il suo moto è maggiore dell’altra.

Siamo soliti porre sulle ascisse il tempo mentre sulle ordinate la posizione:
così facendo, il moto di un oggetto **B**, fermo rispetto al sistema di coordinate, è rappresentato da una linea orizzontale (parallela all’asse dei tempi) mentre il moto di un oggetto **A** è rappresentato da una linea inclinata (la cui pendenza è espressione della velocità).


x
A
B
t

Scegliamo ora invece di porre **l'asse dei tempi sulle ordinate e quello delle posizioni sulle ascisse.**
Così facendo il moto di un oggetto **B**, fermo rispetto al sistema di coordinate, è rappresentato questa volta da una linea <u>verticale</u> (sempre <u>parallela</u> all'asse dei tempi) mentre il moto di un oggetto **A** è rappresentato ancora da una linea inclinata (la cui pendenza è ancora espressione della velocità, ma stavolta essa
indica la tangente dell'angolo che la retta forma
con l'asse delle ordinate, ossia sempre con l'asse dei tempi.)

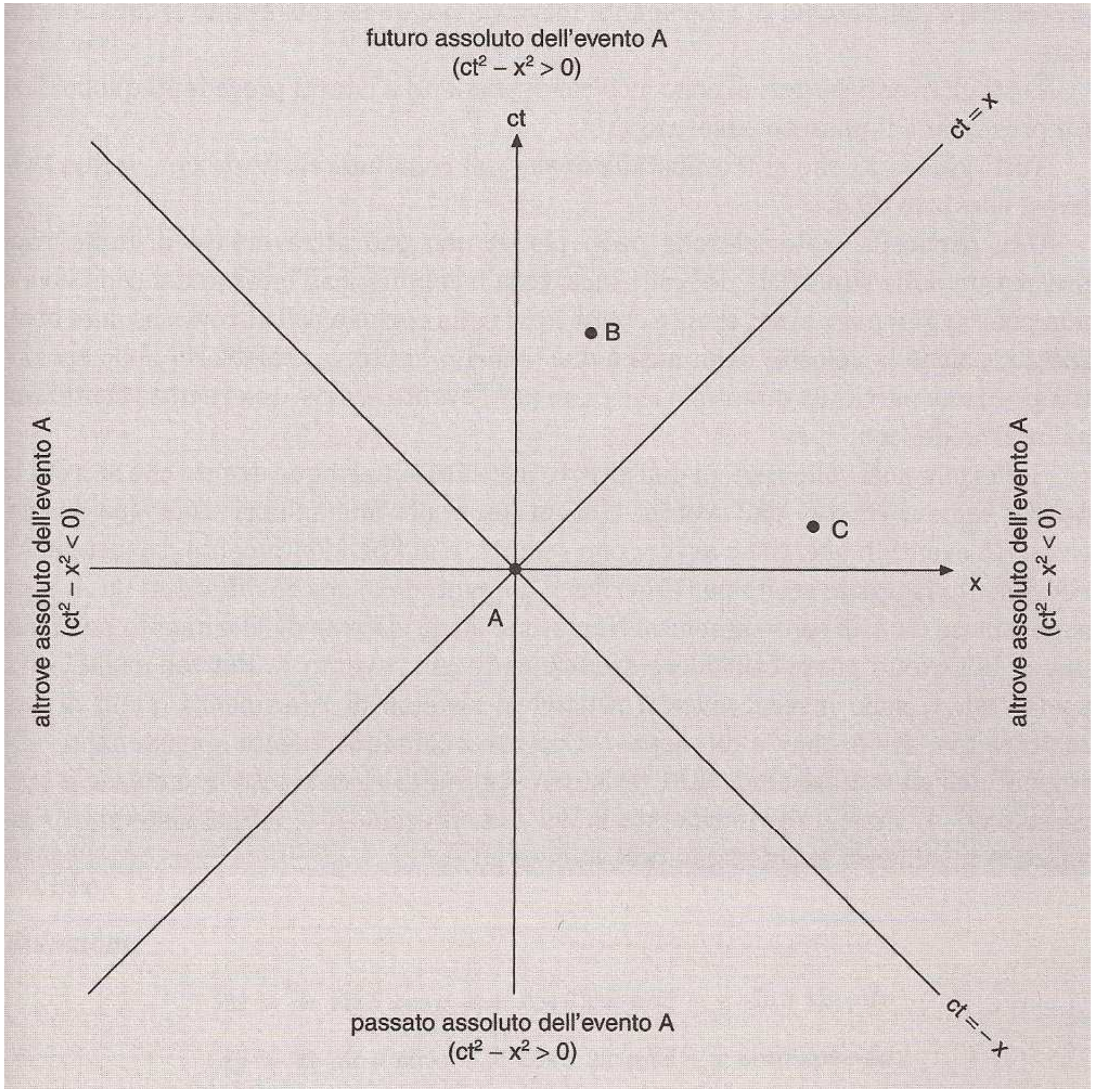


Osservazione: il moto di una particella in questo riferimento sarà in generale una curva, detta *linea d'universo*, che dà l'insieme dei punti dello spazio-tempo corrispondenti al moto.

Si costruisce il seguente diagramma:

- l'asse temporale può essere interpretato fisicamente come **la linea d'universo di un oggetto fermo preso a riferimento**

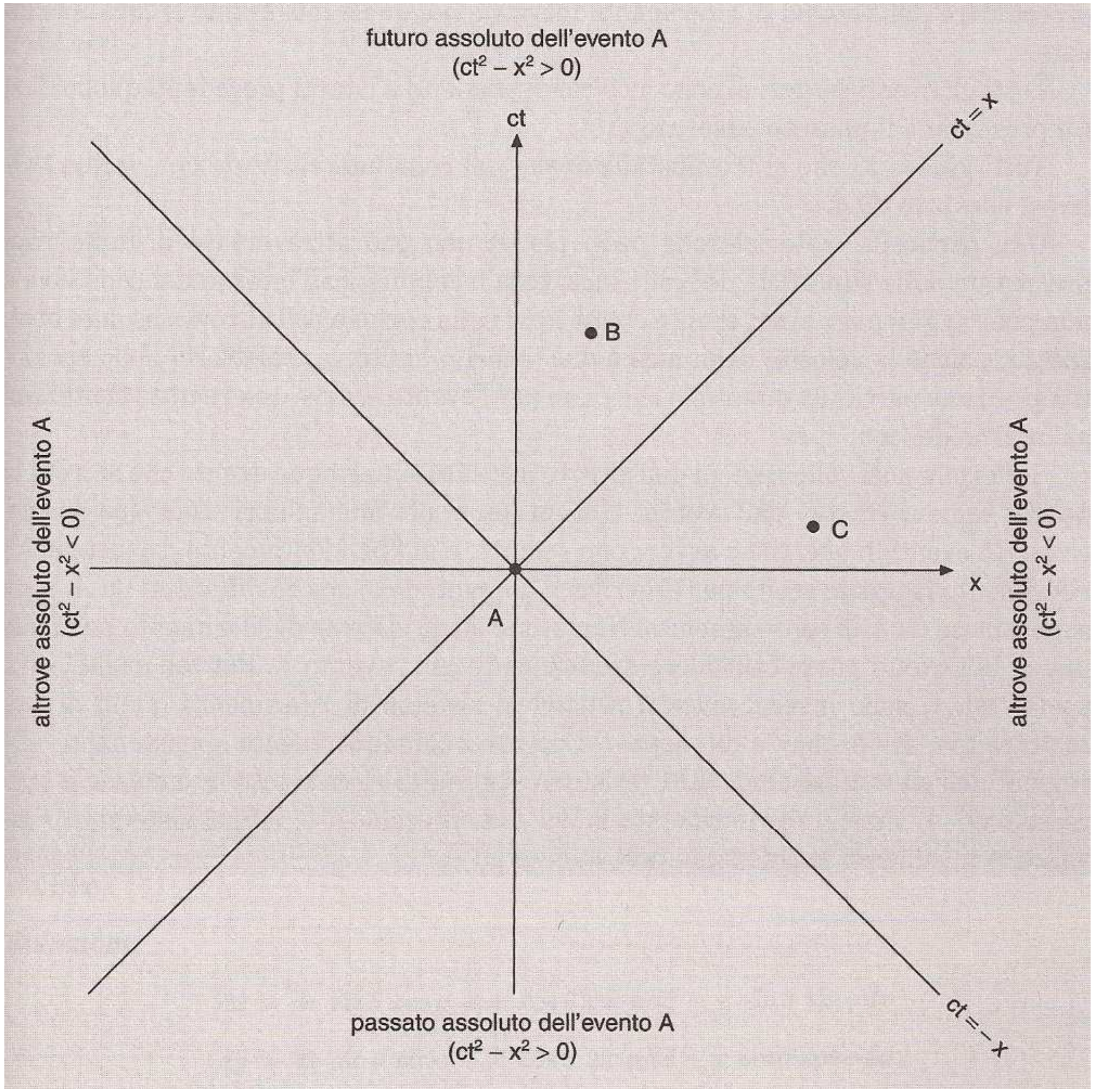
  - l'asse spaziale come l'insieme di tutti gli eventi possibili simultanei ad un evento (considerato convenzionalmente come l'evento di riferimento).



Prima conseguenza della scelta di operare con i diagrammi (x,ct) è che un oggetto in moto alla velocità della luce viene ad essere rappresentato da una linea inclinata di 45° rispetto agli assi.

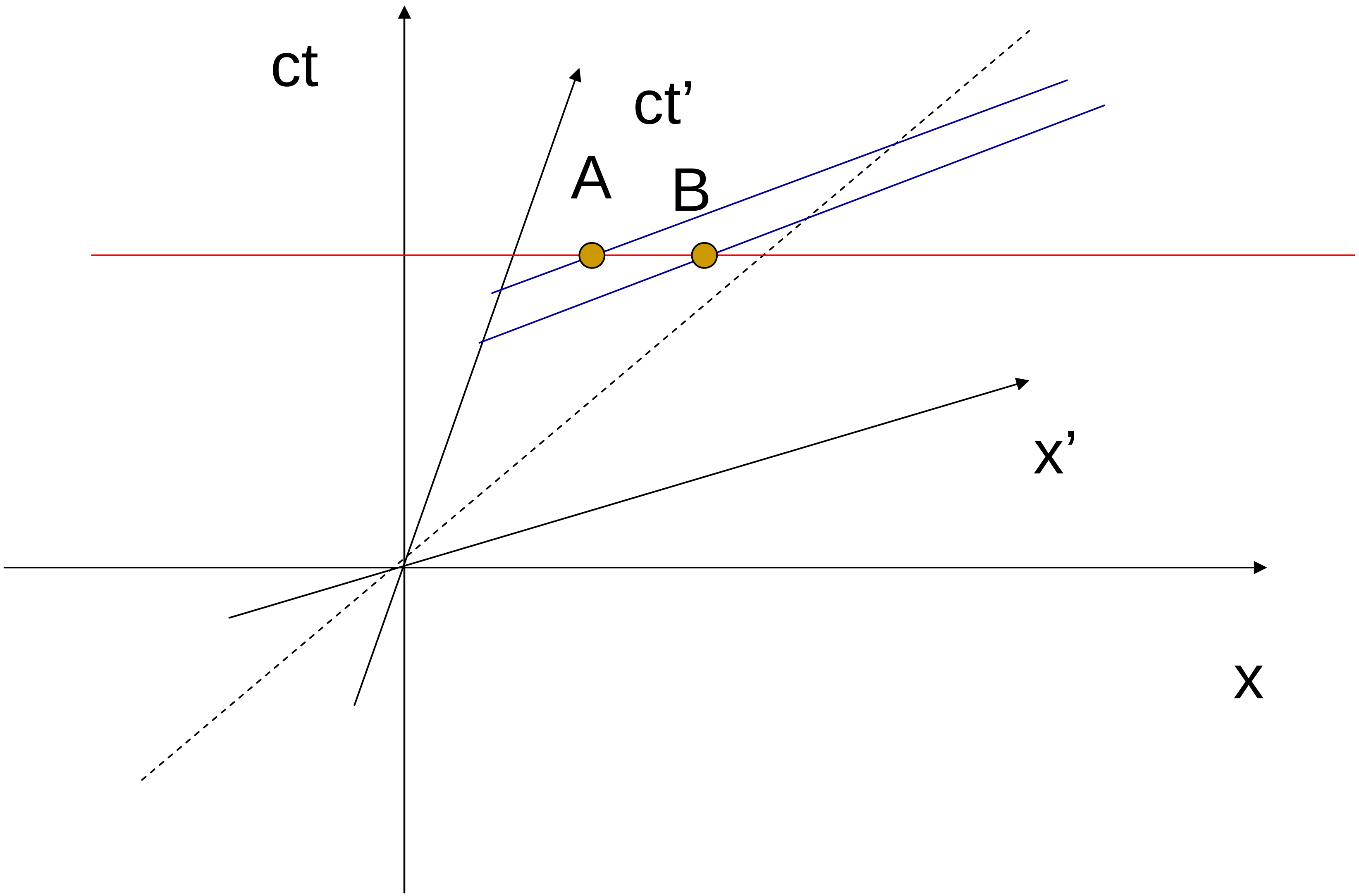
A e B sono eventi separati da un intervallo di genere tempo.

A e C sono eventi separati da un intervallo di genere spazio



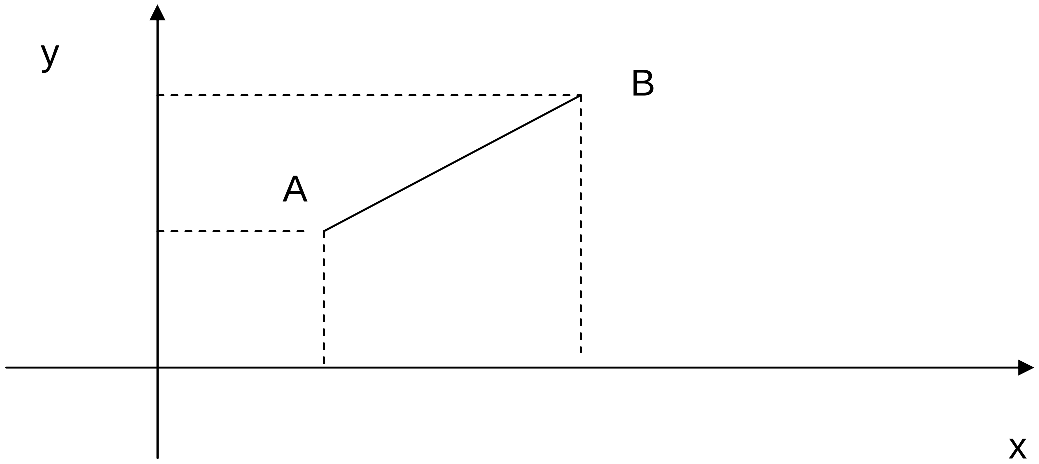
Gli eventi A e B si possono connettere mediante una relazione di CAUSA – EFFETTO, e saranno in tale Relazione per qualsiasi osservatore, anche se esso si muove a velocità relativistiche, mentre non troveremo mai nessun sistema di riferimento per cui A e C siano legati da una relazione temporale.

Se un osservatore si muove a velocità relativistiche, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro cambieranno le distanze e gli intervalli di tempo, pertanto la rappresentazione sul diagramma di Minkowski ci mostrerà un nuovo riferimento non più ortogonale rispetto alla metrica euclidea, ma rispetto a nuove metriche e tale che la linea d’universo dei raggi luminosi bisechi comunque l’angolo tra gli assi x’ e ct’.


ct
ct'
A
B
x'
x

In un tale sistema gli eventi A e B, simultanei per l'osservatore O, non saranno più simultanei per l'osservatore O', in quanto le linee di simultaneità per O' saranno le linee in blu, parallele al suo asse spaziale, mentre le linee di simultaneità per O saranno quelle in rosso, parallele all'asse spaziale di O.
Ciò implica che per l'osservatore O' l'evento B sarà avvenuto prima dell'evento A, mentre per l'osservatore O essi avverranno contemporaneamente.

Nella metrica euclidea l'invariante è la distanza



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Nella nuova metrica l'invariante è:

$$\Delta s^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2$$

Se analizzassimo un evento come il vettore (x,y,ct), trascurando una sola componente spaziale, il diagramma di Minkowski sarebbe rappresentato nel seguente modo: