I CRITERI DI STABILITA'

Per analizzare la stabilità di un sistema, bisogna osservarne i poli e gli zeri della f.d.t., cioè di ricorrere al **criterio di Bode e Nequist**.

Tutte le reti passive sono stabili, invece quelle attive possono risultare instabili.

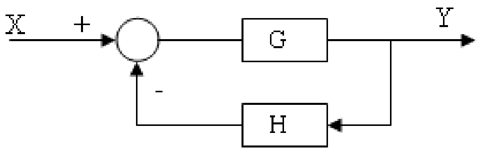
Un sistema si dice stabile se, con una qualunque eccitazione di ampiezza limitata, produce una risposta limitata. Oppure di avere la capacità di evolvere in modo che non si discosti eccessivamente da una certa condizione di riferimento o di equilibrio.

Una sistema si dice instabile se, eccitato da un qualsiasi segnale limitato nel tempo fornisce una risposta oscillatoria o divergente nel tempo (cioè l'uscita non ritorna alla situazione di equilibrio).

Un sistema si dice assintoticamente stabile, quando tende allo stato di equilibrio. Se il movimento libero dello stato del sistema tende a zero per ogni valore della condizione iniziale a tempo che tende all'infinito.

Il problema della stabilità:

Ogni sistema a catena chiusa (feed back) è potenzialmente instabile, il problema di verificarne la stabilità è dunque fondamentale e prioritario. Allora, per studiare la stabilità di un sistema, si ricorre alla sua f.d.t, nel caso di un sistema ad anello chiuso, risulta:



$G_f = G / (1 + GH)$ **(1)**

In forma polinomiale: $G_f(s) = N(s) / [(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)]$ **(2)**

I possibili condizioni di instabilità possono essere di carattere:

1. **matematico,** che si fanno riferimento alla **f.d.t (2),** il criterio di **Routh-Hurwitz**.
2. **grafico**, che si fanno riferimento alla **f.d.t (1),** essi sono il criterio di **Nequist** e di **Bode**.

Criterio di Nequist: questo criterio ricorre ad analisi grafica del diagramma polare della f.d.t $G_f(s)$ di un sistema ad anello chiuso, cioè consiste di tracciare nel piano di Gauss (reale, immaginario: piano complesso)il diagramma polare di GH.

Il sistema di $G_f(s)$ diviene **instabile** quando il guadagno d'anello **GH = -1**.in questo caso la f.d.t $G_f(s) = \infty$.

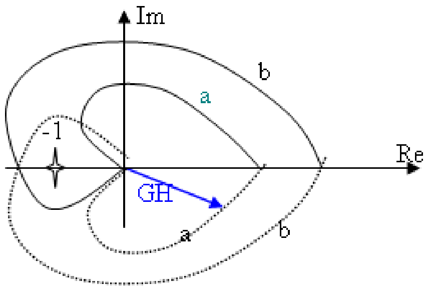
Affinchè non succeda questo, è che il sistema risulta stabile, il diagramma polare di GH **non abbraccia (non contiene) il punto critico (-1, 0)**.

GH = -1 è la condizione di **instabilità**, vale a dire che, **in nessun caso**, il guadagno ad anello deve essere **reale negativo di valore unitario**.

Per tracciare il diagramma polare completo per ω che va da $-\infty$ a $+\infty$, ed occorre sostituire $s = j\omega$, tenendo presente che il diagramma relativo ad ω tra $(-\infty;0)$ è speculare (simmetrico) rispetto all'asse reale del diagramma tracciato per ω tra $(0;+\infty)$.

Piano di Gauss

a: sistema stabile , perché non abbraccia il punto (-1, 0)
b: sistema instabile.



$GH = K_0 N(s) / D(s)$

K_0: guadagno statico per s = 0.

Un sistema può essere stabile o instabile a seconda del valore del guadagno statico, infatti un K_0 elevato può creare problemi di stabilità.

Affinchè un sistema è tanto **affidabile**, occorre **non solo** verificare la stabilità teorica, ma anche **assicurare** un certo **margine di sicurezza** che ci mette al riparo di eventuali difetti delle nostre valutazioni. Allo scopo si valutano due parametri che sono detti **margine di guadagno e di fase**.

Supponiamo di considerare un sistema stabile avente la caratteristica polare come in figura.

Si definisce **margine di guadagno**:

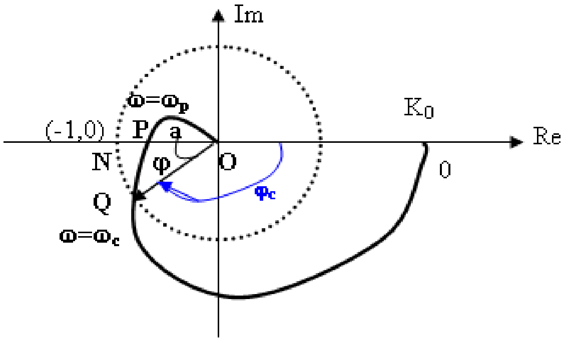
$|M_G| = 1 / a = 1 / |HG|_{\omega=\omega_p}$

a = OP

in deciBel:

$|M_G|_{dB} = 20 \, Log|M_G| = -20 \, Log\,(a)$

il margine di guadagno di un sistema stabile è un valore positivo in deciBel.



Si definisce margine di guadagno M_φ è l'angolo del vettore OQ rispetto a 180°.

$M_\varphi = 180 - |\varphi_c|$ (**φ_c detta fase critica**)

La fase e la pulsazione critiche si calcolano:

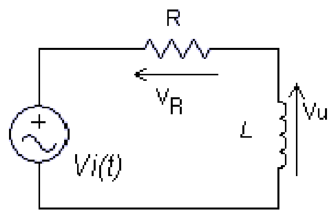
- **$\varphi_c = \angle (HG)_{\omega=\omega c}$;**
- $|HG|_{\omega=\omega c} = 1.$

se $\varphi_c < 180$ cioè $M_\varphi > 0$, il sistema è stabile se viceversa $\varphi_c > 180$ il sistema in anello chiuso è instabile.

I margini di stabilità solitamente consigliati in fase di progetto sono: $M_g > 10$ [dB] e $M_\varphi > 45°$.

Esempio di un sistema del 1° ordine:

tracciare il diagramma di Nequist, e verificarne la stabilità.



Nel dominio di Laplace:

$Z_R = R$

$Z_L = J\omega L = sL$

Applicando la regola del partitore di tensione, si ha: $V_u(s) = [Z_L / (Z_R + Z_L)] \,.\, V_i(s)$

La f.d.t del circuito $G_f(s) = V_u(s)/V_i(s) = [Z_L / (Z_R + Z_L)]$

$G_f(s) = sL/(R+sL)$ bisogna trasformare la f.d.t in G(s) = Re + j IM

$G_f(s) = [sL/(R+sL)] \,.\, [(R-sL)/(R-sL)] = sL.((R - sL) / (R^2 - s^2L^2) = (sLR - s^2L^2) / (R^2 - s^2L^2)$

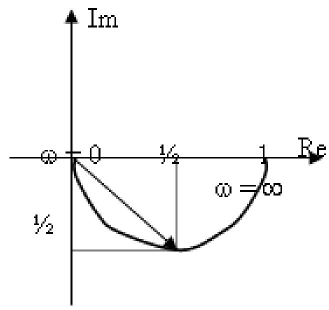
I poli della f.d.t. sono: R + sL = 0, s = - R/L Gli zeri: sL = 0 , s = 0.

Nel dominio della frequenza, occorre sostituire s = jω, si ha:

$G_f(j\omega) = (j\omega LR - (j\omega)^2L^2) / (R^2 - (j\omega)^2L^2) = (j\omega LR + \omega^2L^2) / (R^2 + \omega^2L^2)$

$(j^2 = -1)$

$Re = (\omega^2L^2) / (R^2 + \omega^2L^2)$ $Im = (\omega LR) / (R^2 + \omega^2L^2)$



Analisi:

1. per ω = 0 si ha : Re = 0 Im = 0 $|G_f(0)| = 0$
2. per ω = ∞ si ha : Re = 1 Im = 0 $|G_f(\infty)| = 1$
3. per ω = R/L si ha : Re = 1/2 Im = 1/2 $|G_f(R/L)| = 1/\sqrt{2}$

come si vede dal grafico, il diagramma non abbraccia il punto critico (-1,0) dell'instabilità, il circuito è stabile.

CRITERIO DI BODE:

il criterio di Bode sulla stabilità si basa sul tracciamento di due diagrammi cartesiani, uno riferito al modulo e l'altro alla fase del guadagno d'anello GH del sistema retroazionato.

1. diagramma del modulo in deciBel: **$|GH|_{dB} = 20 \, Log_{10} |GH|$**
2. diagramma della fase: **$\varphi = \angle GH = arctg(GH)$**

si tracciano i due diagrammi correlati, riferiti ad una scala logaritmica delle frequenze e si verificano due situazioni:

a) ***in corrispondenza al guadagno 0[dB] si osserva il guadagno***:

   i. Se $\varphi < 180°$, il ***sistema è stabile***; e il ***margine di fase*** **è dato da:** $\varphi_M = 180° - \varphi$.

   ii. Se $\varphi > 180°$, il ***sistema è instabile.***

b) ***In corrispondenza alla fase*** $\varphi = 180°$ ***si osserva il guadagno***:

   i. Se $|GH|_{dB} < 0$ il ***sistema è stabile***; il ***margine di guadagno*** è dato da $-20 Log_{10} |GH|$.

   ii. Se $|GH|_{dB} > 0$ il ***sistema è instabile***

Una funzione GH del 1° ordine corrisponmderà sempre ad un sistema stabile, perché non può produrre angoli di fase superiori a 90°.

Un sistema ad anello **chiuso è stabile** **se è soltanto se** tutti i **poli** della f.d.t sono **reali negativi** o **complessi coniugati a parte reale negativa**, cioè i poli sono situati nel semipiano sinistro (negativo) di Gauss rispetto all'asse reale (fig. 1). **Nella pratica** questa condizione **non** è del tutto **sufficiente** ad assicurare la stabilità, è consigliabile che i poli siano situati in una zona tratteggiata (fig. 2), in tale modo si assicura un certo **margine di stabilità** escludendo poli coniugati troppo vicini all'asse immaginario, ai quali corrisponde in genere un tempo di assestamento piuttosto lungo (**transitori troppo lunghi**) con una situazione di stabilità precaria.

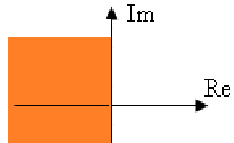


Fig. 1

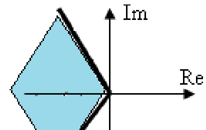


Fig. 2

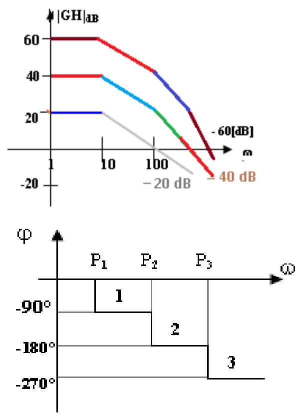
Per lo studio effettuato sulla f. d. t. si rammenta che:

1. **nel diagramma della fase**:
   a. ogni **ZERO** determina uno sfasamento in anticipo di **+ 90°.**
   b. Ogni **POLO** determina uno sfasamento in ritardo di **– 90°.**
2. **nel diagramma del modulo:**
   a. un **POLO** crea una pendenza di **– 20[dB].**
   b. un **ZERO** crea una pendenza di **+ 20[dB].**

La stabilità del sistema di reazione attraverso la lettura dei diagrammi del modulo e della fase

Si indica con W(s) = GH il gudagno d'anello, quando:

1. $|W(s)|_{dB}$ taglia l'asse di ω con una pendenza di – 20[dB], il sistema è sicuramente stabile, con un angolo di sfasamento è inferiore a 180°.
2. $|W(s)|_{dB}$ taglia l'asse di ω in corrispondenza del cambiamento di pendenza da – 20[dB] a – 40[dB] o con – 40 [dB] il sistema è di incerta stabilità.
3. $|W(s)|_{dB}$ taglia l'asse di ω (0 [dB]) con una pendenza di – 60[dB], il sistema è instabile.



Nel caso di una generica f.d.t si ha:

$$G(s) = \frac{K \cdot (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2).....(1 + s\tau_m)}{s^g \cdot (1 + sT_1)(1 + sT_2).....(1 + sT_n)}$$

sostituendo a **s** la variabile **j**ω e calcolando **il modulo in dB** si ottiene:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot Log_{10}|K| + 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega\tau_1| + ... + 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega\tau_m| - 20 \cdot g \cdot Log_{10}|\omega| - 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega T_1| - ... - 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega T_n|$$

si analizza l'effetto dei singoli termini.

a) Il primo termine non crea problemi essendo costante al variare di ω (pendenza 0 dB): $20 \cdot Log_{10}|K|$; si tratta di una retta orizzontale.

b) I termini $20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega\tau_1| + ... + 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega\tau_m|$ e $- 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega T_1| - ... - 20 \cdot Log_{10}|1 + j\omega T_n|$ si comportano, al variare di ω, in questo modo:

i. I primi, per $\omega\tau_i < 1$ sono uguali a 0 [dB]; invece, per $\omega\tau_i = 1$ sono 0[dB], errore per difetto di 3[dB] e per $\omega\tau_i > 1$ pendenza di +20[dB].

ii. I secondi, per $\omega T_p < 1$ sono uguali a 0[dB]; per $\omega T_p = 1$ sono 0[dB], errore per eccesso di 3 [dB]; invece per $\omega T_p > 1$ pendenza di –20[dB]

iii. Infine: -20. g. $\mathrm{Log}_{10}\omega$: pendenza di –20.g [dB]per tutti i valori di ω; g determina il tipo del sistema, che corrisponde al numero dei poli nell'origine.

Il diagramma completo è dato dalla somma dei diagrammi dei singoli termini sopra indicati.

Per **la fase si ha**:

Fase |G(jω)| = fase (K) + fase(1 + $j\omega\tau_1$) + ... + fase(1 + $j\omega\tau_m$) – fase[$(j\omega)^g$] - fase(1 + $j\omega T_1$) - ... - fase(1 + $j\omega T_n$)

Gli effetti dei singoli termini:

- Dal momento che K è un numero reale la sua fase può essere 0° oppure 180° a seconda che K sia positivo o negativo.

Per gli altri termini si ha:

- fase(1 + $j\omega\tau_i$) = arctg($\omega\tau_i$): per $\omega > 0$ assumevalori compresi fra 0° e +90° per τ_i>0, tra 0° e -90° per τ_i<0 .
- - fase(1 + $j\omega T_p$) = arctg(ωT_p): per $\omega > 0$ assumevalori compresi fra 0° e +90° per T_p>0, tra 0° e -90° per T_p<0 .
- – fase[$(j\omega)^g$] = - g . fase($j\omega$) = - g . 90°: infatti $j\omega$ è un numero immaginario puro e positivo e la sua fase vale dunque 90° per ogni valore di ω.

Anche per la fase il diagramma completo è dato dalla somma dei diagrammi della fase dei singoli termini.

ESERCIZI DIAGRAMMI BODE

ES.1 Tracciare i diagrammi cartesiani di Bode di G(jω) :

$$G(j\omega) = \frac{10 \cdot (1 + 10\,j\omega)}{1 + 0{,}1\,j\omega}$$

-------------- o --------------

s = jω

G(s) = 10(1 + 10s) / (1 + 0,1 s)

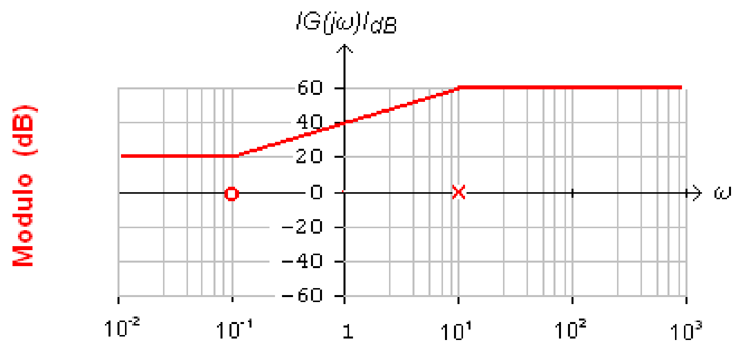
G(s) = N(s) / D(s)

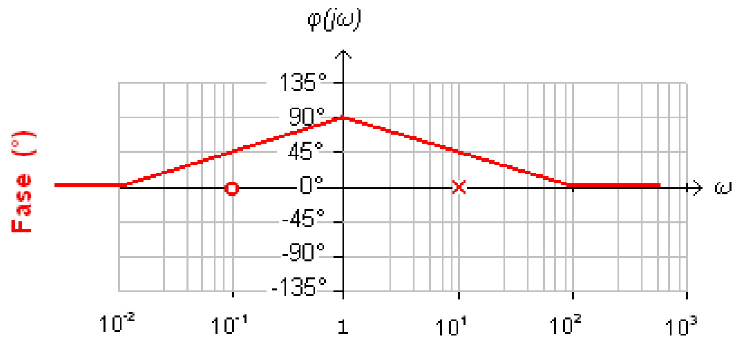
- Zeri: N(s) = 0

10(1+10s) = 0 ; s = - 0,1 = - 10^{-1}

- Poli: D(s) = 0

1 + 0,1 s = 0; s= - 10





L'ordine del sistema con questa f.d.t è corrisponde al numero dei poli, allora è uno.

Il tipo è dato dal numero di poli all'origine, è di tipo zero, non si ha nessun polo è uguale a zero.

Interpretazione diagramma del modulo:

- K = 10: il modulo corrisponde a 20[dB] orizzontali.
- (1 + j ω10): il modulo per ω10 < 1 oppure ω< 0,1 risulta 0 [dB]. Invece se ω > 0,1 con pendenza di +20[dB]
- (1 + j ω0,1): il modulo per ω 0,1 < 1 oppure ω< 10 risulta 0 [dB]. Invece se ω > 10 con pendenza di -20[dB]

Interpretazione diagramma della fase: