Un sistema è paragonato a un blocco funzionale o a una scatola nera. Mediante la trasformata di Laplace si ottiene un modello matematico del rapporto uscita-ingresso del sistema, con la forma:

$$G(s) = \frac{Xu(s)}{Xi(s)}$$

G(s) prende il nome di **funzione di trasferimento** (f.d.t.) che, descrive il legame tra il segnale d'uscita $X_u(s)$ e quello d'ingresso $X_i(s)$ del sistema, nel dominio della variabile s.
$s = j\omega$ è l'operatore immaginario di Laplace, con $j^2 = -1$.
Dall'espressione della G(s) si possono trarre informazioni sui sistemi di controllo in merito alla **stabilità** e alle **condizioni statiche e dinamiche.**

La f.d.t di un sistema lineare si può sempre esprimere come rapporto di polimoni a coefficienti reali (a_i e b_i), nella variabile s.

$$G(s) = \frac{Xu}{Xi} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s^1 + a_0}$$

N(s): polinomio al numeratore della f.d.t.: i valori che annullano **N(s) = 0**, si dicono **ZERI**.
D(s): polinomio al denominatore della f.d.t.: i valori che annullano **D(s) = 0**, si dicono **POLI**.

Risolvendo la *N(s)=0* ($b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0 = 0$) si ottengono *m* radici dette **ZERI** di G(s) $\rightarrow z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots$

Risolvendo la *D(s)=0* ($a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 = 0$) si ottengono *n* radici dette **POLI** di G(s) $\rightarrow p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$

Gli zeri e i poli possono essere reali o complessi; nel secondo caso si presentano a coppie coniugati, cioè con identica parte reale e parti immaginarie con segno opposto (ad es: $z_1 = \alpha + j\beta$ e $z_2 = \alpha + j\beta$).
Analizzando zeri e poli si possono valutare le principali caratteristiche di un sistema, come ad esempio la stabilità.

L'**ordine** di un sistema è rappresentato dal numero dei poli della corrispondente f.d.t. **G(s)**, esso corrisponde al grado massimo di D(s), cioè al **valore di n**.

FORMA CANONICA

La f. d. t. costituisce uno degli strumenti fondamentali per l'analisi dei sistemi, per utilizzarla è opportuno trasformarla nella forma canonica. Per fare questo occorre:

Primo: si scompongono in fattori il numeratore ed il denominatore:

$$G(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_m \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{a_n \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_n)}$$

Dove ovviamente $\mathbf{z_i}$ e $\mathbf{p_i}$ sono i generici zeri e poli della f.d.t.

Secondo: raccogliere a fattore comune al numeratore gli zeri ed al denominatore i poli (entrambi cambiati di segno):

$$G(s)=\frac{b_m\cdot(-z_1)\cdot(-z_2)\cdot\ldots\cdot(-z_m)}{a_n\cdot(-p_1)\cdot(-p_2)\cdot\ldots\cdot(-p_n)}\cdot\frac{(1-\frac{s}{z_1})\cdot(1-\frac{s}{z_2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{s}{z_m})}{(1-\frac{s}{p_1})\cdot(1-\frac{s}{p_2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{s}{p_n})}$$

Il fattore costante, che può essere positivo che negativo, prende il nome di guadagno statico (costante di Bode o fattore di trasferimento).

$$K=\frac{b_m\cdot(-z_1)\cdot(-z_2)\cdot\ldots\cdot(-z_m)}{a_n\cdot(-p_1)\cdot(-p_2)\cdot\ldots\cdot(-p_n)}$$

E così, la f.d.t. diventa:

$$G(s)=K\cdot\frac{(1-\frac{s}{z_1})\cdot(1-\frac{s}{z_2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{s}{z_m})}{(1-\frac{s}{p_1})\cdot(1-\frac{s}{p_2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{s}{p_n})}$$

Terzo: si suppone che:

$$\tau_1=-\frac{1}{z_1}\quad;\quad\tau_2=-\frac{1}{z_2}\quad;\quad\ldots\ldots\quad\tau_m=-\frac{1}{z_m}$$

$$T_1=-\frac{1}{p_1}\quad;\quad T_2=-\frac{1}{p_2}\quad;\quad\ldots\ldots\quad T_m=-\frac{1}{p_m}$$

$$G(s)=K\cdot\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\ldots\ldots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\ldots\ldots(1+sT_n)}$$

$\tau_1\ldots\tau_m$; $T_1\ldots T_n$ costanti di tempo.

Il **Guadagno Statico** *K* rappresenta il valore assunto dalla G(s) per s = 0 , ovvero per segnali d'ingresso costanti.

Se G(s) ha poli nell'origine $K=\infty$. invece, per G(s) con zeri nell'origine $K = 0$.

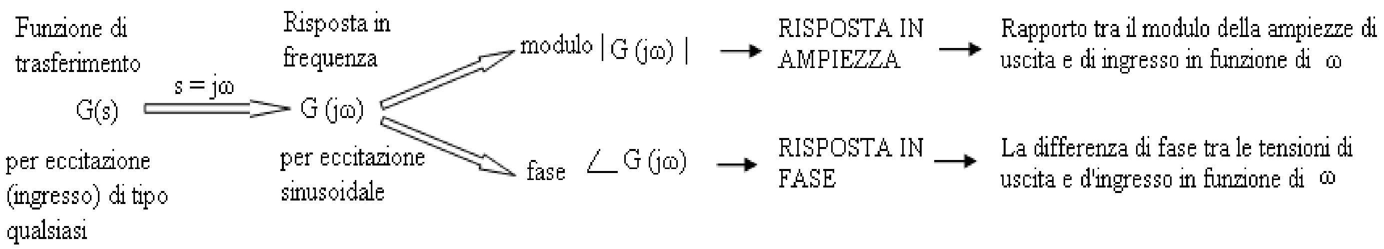
L'ANALISI DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

L'analisi del comportamento di un sistema in regime sinusoidale si effettua conoscendo la sua f.d.t in forma trasformata **G(s)** e studiando l'andamento di questa in modulo e argomento (fase) dopo che alla variabile **(s)** è stata sostituita con il corrispondente parte immaginaria **(jω)**.

La figura sotto sintetizza quanto appena detto.

I DIAGRAMMI DI BODE

La risposta in ampiezza (modulo) e la risposta in fase di un sistema lineare vengono generalmente rappresentate graficamente mediante diagrammi semilogaritmici detti **diagrammi di Bode**.



Il modulo è espresso in dB:

$$|G(s)|_{dB}=20\lg|K|+20\lg|1+s\tau_1|+\ldots+20\lg|1+s\tau_m|-20\lg|1+sT_1|-\ldots-20\lg|1+sT_n|$$

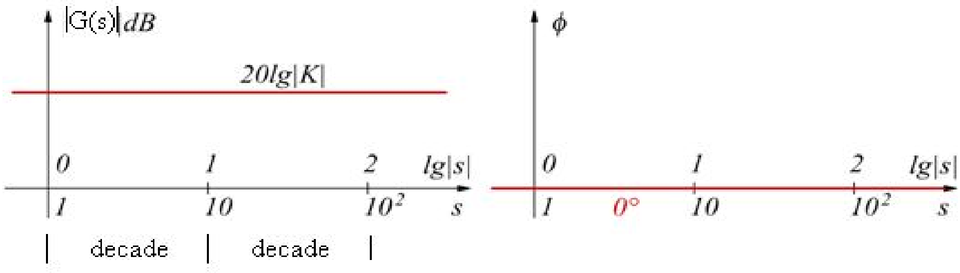
La fase in dB

$$\phi = \angle G(j\omega) = arctg\frac{0}{K} + arctg\,\omega\tau_1 \cdots + arctg\,\omega\tau_m - arctg\,\omega T_1 \cdots - arctg\,\omega T_n \Rightarrow arctg\frac{0}{K} = \begin{cases} 0 \text{ se } K>0 \\ 180° \text{ se } K<0 \end{cases}$$

LE CINQUE FUNZIONI ELEMENTARI (zeri e poli reali, negativi o nulli)

1) Funzione di trasferimento costante

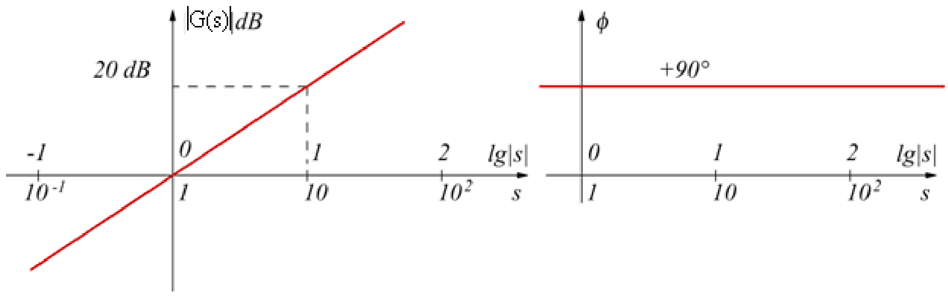
$$G(j\omega) = K \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20\,lg\,|K| \\ \phi = 0° \text{ se } K>0 \;\; 180° \text{ se } K<0 \end{cases}$$



2) Funzione di trasferimento con uno zero nell'origine (z = 0) G(s) = s

Il diagramma di Bode è una retta passante per l'origine , con pendenza di 20 dB/decade.

Ogni variazione della ω di un fattore di 10 (1 decade), corrisponde una variazione del modulo pari a 20 dB. La variazione del modulo di 1 ottavo (corrispondente al raddoppio della ω) vale 6 dB.. il diagramma dell'argomento è costante a 90°, perché la funzione G(jω) = jω è puramente immaginaria.



per $s=j\omega$ (in regime sinusoidale puro):

$$G(j\omega) = j\omega \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20\,lg\,\omega \\ \phi = atg\frac{\omega}{0} = atg(\infty) = +90° \end{cases}$$

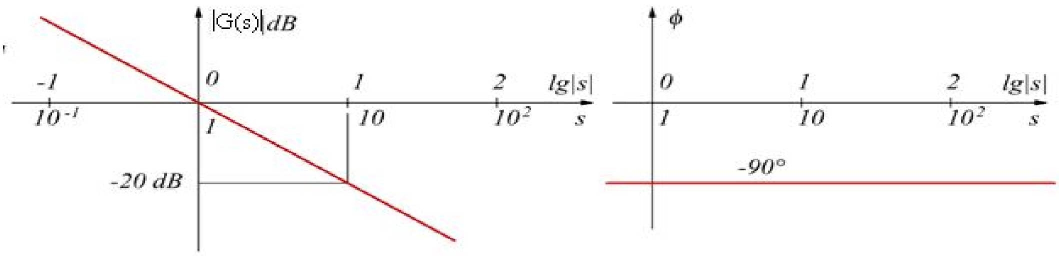
3) Funzione di trasferimento con un polo nell'origine (p = 0)

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow |G(s)|_{dB} = 20\,lg\left(\frac{1}{s}\right) = -20\,lg\,s$$

La pendenza del diagramma del modulo è negativa (-20 dB/decade), a causa del segno negativo nell'espressione del modulo, il diagramma dell'argomento è costante a -90°, perché la funzione G(jω) è puramente immaginaria con coefficiente negativo.

per $s=j\omega$ (in regime sinusoidale puro):

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = -20\,lg\,\omega \\ \phi = -atg\left(\frac{\omega}{0}\right) = atg(-\infty) = -90° \end{cases}$$



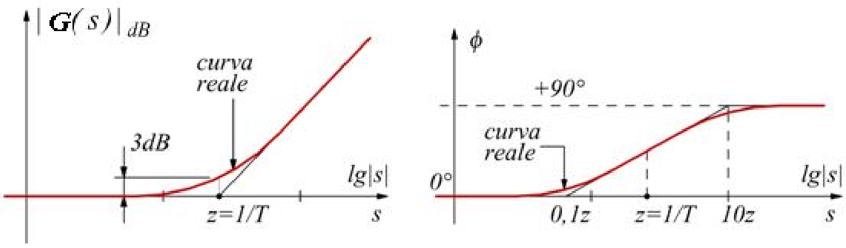
4)Funzione di trasferimento con uno zero reale negativo (z = $-\omega_z$ = $- 1/\tau$)

$$G(s) = 1 - \frac{s}{z} = 1 + s\tau \Rightarrow |G(s)|_{dB} = 20\lg|1+s\tau| = 20\lg\sqrt{1+(s\tau)^2} \quad \textbf{per} \begin{cases} s\tau \ll 1 \;\rightarrow\; s \ll \frac{1}{\tau} \;\rightarrow\; 20\lg\sqrt{1} = 0 \\ s\tau \gg 1 \;\rightarrow\; s \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow\; 20\lg s\tau = 20\lg s + 20\lg\tau \end{cases}$$

In regime sinusoidale puro:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} \omega\tau \ll 1 \;\rightarrow\; \omega \ll \frac{1}{\tau} \;\rightarrow\; 20\lg\sqrt{1} = 0 \;\Longrightarrow\; \omega \rightarrow 0\,,\;\; |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \\ \omega\tau \gg 1 \;\rightarrow\; \omega \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow\; 20\lg\omega\tau = 20\lg\omega + 20\lg\tau \;\Longrightarrow\; \omega \rightarrow \infty,\;\; |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow 20\lg\omega\tau \end{cases}$$

In corrispondenza dello zero , il diagramma di Bode è con una pendenza di +20 dB/decade.



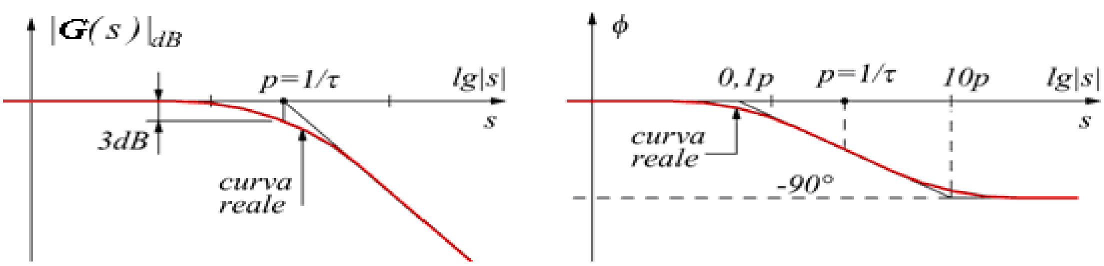
5) Funzione di trasferimento con un polo reale negativo (p = $-\omega_p$ = $- 1/T$)

$$G(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{p}} = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow |G(s)|_{dB} = -20\lg|1+sT| = -20\lg\sqrt{1+(sT)^2} \quad \textbf{per} \begin{cases} sT \ll 1 \;\rightarrow\; s \ll \frac{1}{T} \;\rightarrow\; -20\lg\sqrt{1} = 0 \\ sT \gg 1 \;\rightarrow\; s \gg \frac{1}{T} \rightarrow\; -20\lg sT = -20\lg s - 20\lg T \end{cases}$$

In regime sinusoidale puro:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} \omega T \ll 1 \;\rightarrow\; \omega \ll \frac{1}{T} \;\rightarrow\; -20\lg\sqrt{1} = 0 \;\Longrightarrow\; \omega \rightarrow 0\,,\;\; |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \\ \omega T \gg 1 \;\rightarrow\; \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow\; -20\lg\omega T = -20\lg\omega - 20\lg T \;\Longrightarrow\; \omega \rightarrow \infty,\;\; |G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -20\lg\omega T \end{cases}$$

In corrispondenza al polo, il diagramma di Bode è con una pendenza di -20 dB/decade.

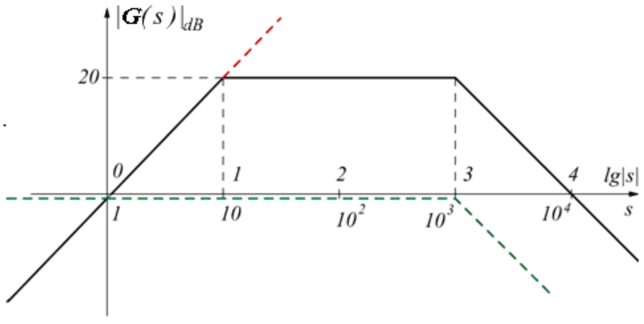


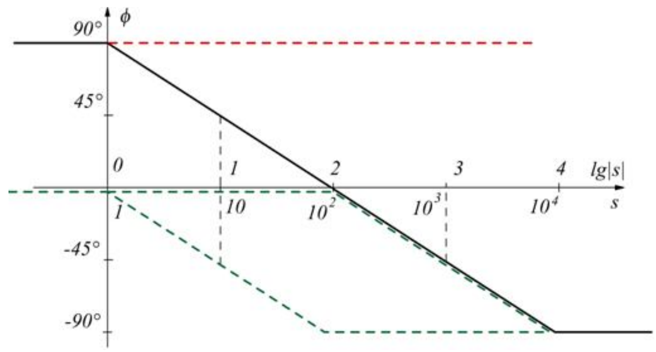
ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UN DIAGRAMMA DI BODE

1) Disegnare il diagramma del modulo e della fase, della f.d.t.

$$G(s) = \frac{s}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} = \frac{s}{(1+s10^{-1})(1+s10^{-3})}$$

è dotata di uno zero nell'origine e di due poli reali. Per quello che riguarda il diagramma del modulo, l'elemento che troviamo alla frequenza minore è lo zero nell'origine.

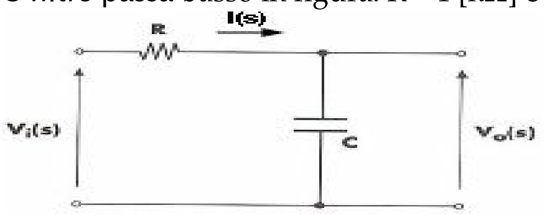




2) Calcolare i poli, gli zeri, il guadagno statico e indicandone l'ordine delle seguenti f.d.t.

$$G_1(s) = \frac{1}{s(1+s/10)}; \qquad G_2(s) = \frac{0.1}{s(1+s/100)}$$

3) ricavare la f.d.t. del circuito RC filtro passa-basso in figura. R = 1 [kΩ] e C = 1 [μF]



Disegnare il diagramma di Bode del modulo e della fase, per le f.d.t.

$G_1(s) = 1 / (1 + s\, 10^{-2})$

$G_2(s) = 10 / (1 + s\, 10^{-2})$

$G_3(s) = 1 / (s^2\, 10^{-2})$

$G_4(s) = 1 / (1 + s\, 10^{-2})$

$G_5(s) = 1 / (1 + s^2\, 10^{-2})^2$

$G_6(s) = s / (1 + s\, 10^{-2})(1 + s10^{-5})$