ESERCIZI SVOLTI SUL CRITERIO DI BODE

GRUPPO A

Stabilire in base ai valori dei poli, se le seguenti fdt riferite a sistemi controreazionati ad anello chiuso, caratterizzano sistemi stabili:

ESERCIZIO 1

$$G(s) = \frac{10(s-2)(s-4)}{(s+1)(s+5)(s+7)}$$

la fdt proposta ha tutti i poli negativi: $p_1=-1$; $p_2=-5$; $p_3=-7$ e quindi si riferisce ad un sistema **stabile**. Il fatto che ha zeri positivi ($z_1 = 2$ e $z_2 = 4$) non influisce sulla stabilità del sistema.

ESERCIZIO 2

$$G(s) = \frac{15(s+1)}{(s+3)(s-4)(s+6)}$$

la fdt ha i poli: $p_1=-3$; $p_2=+4$; $p_3=-6$. Essendo presente un polo positivo $p_2=+4$ il sistema è **instabile.**

ESERCIZIO 3

$$G(s) = \frac{20(s-2)}{s(s+3)(s+7)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_1=0$; $p_2=-3$; $p_3=-7$, quindi essendo presente il polo nullo p1, si riferisce ad un sistema **al limite della stabilità.**

ESERCIZIO 4

$$G(s) = \frac{10s}{(s+2+2j)(s+2-2j)}$$

la fdt proposta ha i poli complessi coniugati: $p_1=-2-2j$; $p_2=-2+2j$ con la parte reale negativa , quindi essa si riferisce ad un sistema **stabile asintoticamente.**

ESERCIZIO 5

$$G(s) = \frac{30}{(s+2)(s-3+2j)(s-3-2j)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_1=-2$; $p_2=+3-2j$; $p_3=+3+2j$
i cui poli complessi coniugati presentano la parte reale positiva , quindi essa si riferisce ad unsistema **instabile.**

ESERCIZIO 6

$$G(s) = \frac{15(s-3)}{(s+4)(s^2+25)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_1= -4$; $p_2=-5j$; $p_3=+5j$; i cui poli immaginari coniugati presentano la parte reale nulla, quindi essa si riferisce ad un sistema **stabile ma non asintoticamente.**

ESERCIZIO 7

$$G(s) = \frac{20}{(s^2-9)(s^2+9)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_1= -3$; $p_2=+3$; $p_3=+3j$; $p_4=-3j$ poiché è presente un polo positivo p_2 , il sistema è **instabile.**

ESERCIZIO 8

$$G(s) = \frac{10s^2}{(s+2)(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_1= -2$; $p_2=-1-2j$; $p_3=-1+2j$; il sistema è **stabile asintoticamente.**

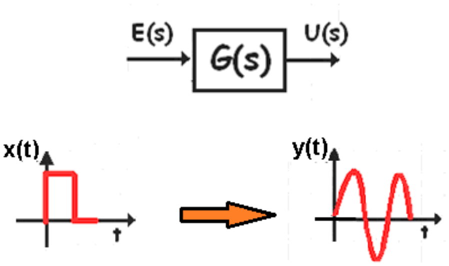
ESERCIZIO 9

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$$

la fdt proposta ha i poli : $p_{1,2}=0$; $p_3=-2$; $p_4=-3$
il sistema, avendo un polo nullo doppio, è **instabile.**

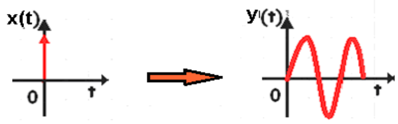
GRUPPO B

Stabilire se i seguenti sistemi, sollecitati da impulsi unitari (Dirac) o da segnali limitati in ingresso, sono stabili, asintoticamente stabili o instabili, in base al tipo di risposta.

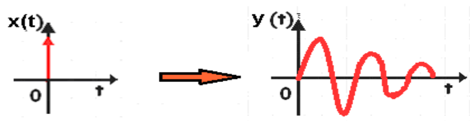


1- Poiché l'ingresso limitato produce un'uscita di ampiezza limitata, il sistema è **STABILE** ma non asintoticamente.

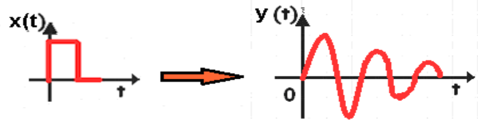
2- se l'ingresso è un segnale di tipo impulsivo, per caratterizzare un sistema stabile, la risposta deve tendere a zero e non essere limitata in ampiezza: quindi nel nostro caso il sistema è **INSTABILE.**



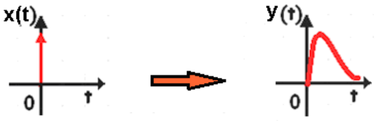
3- Poiché l'ingresso è un segnale di tipo impulsivo e la risposta tende a zero il sistema è **STABILE**



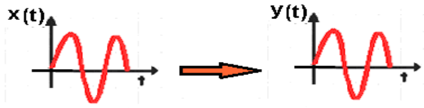
4- Poiché la risposta ad un segnale limitato in ampiezza tende a zero, il sistema è **asintoticamente STABILE**



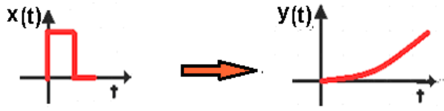
5- Poiché la risposta ad un segnale impulsivo unitario tende a zero , il sistema è **STABILE**



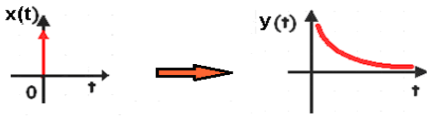
6- Il sistema è **stabile** ma non asintoticamente, risposta limitata ad un segnale limitato



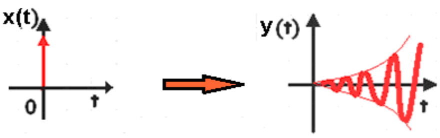
7- Poiché la risposta ad un segnale limitato in ampiezza diverge, il sistema è **INSTABILE**



8- Poiché la risposta ad un segnale impulsivo unitario tende a zero, il sistema è **STABILE**



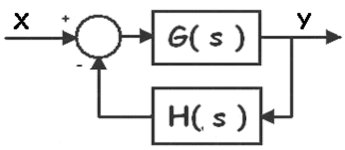
9- Poiché la risposta ad un segnale impulsivo diverge, il sistema è **INSTABILE**.
(Per essere stabile deve tendere a zero)



GRUPPO C - CRITERIO DI BODE

ESERCIZIO 1C

Dato il sistema controreazionato di figura determinare se è stabile tramite il criterio di BODE, dove:



$$G(s) = \frac{20}{s(1-2s)} \qquad H(s) = \frac{1}{(1+s)}$$

Soluzione:

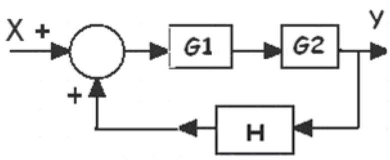
La fdt ad anello aperto G(s)H(s) risulta:

$$G(s)H(s) = \frac{20}{s(1-2s)(1+s)}$$

E poichè presenta un polo p=1/2 positivo , il sistema cui è associata , è instabile e pertanto il criterio non può essere applicato.

ESERCIZIO 2C

Determinare se il sistema rappresentato in figura è stabile applicando il criterio di BODE, dove:



$$G1(s) = \frac{10s}{s+1} \qquad G2(s) = \frac{1}{s+4} \qquad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

Soluzione:

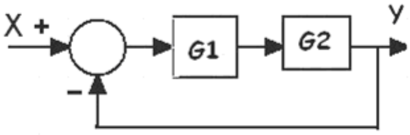
La fdt ad anello aperto è:

$$G1(s)G2(s)H(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+4)(s+2)}$$

Pertanto è stabile perchè presenta poli negativi, ma essendo la controreazione positiva, il criterio di BODE non può essere applicato.

ESERCIZIO 3C

Determinare , mediante il criterio di BODE, se il sistema rappresentato in figura è stabile, dove:



$$G1(s) = \frac{1-2s}{1+3s} \qquad G2(s) = \frac{10}{1+5s}$$

Soluzione:

La fdt ad anello aperto del sistema è:

$$G1(s)G2(s) = \frac{10(1-2s)}{(1+3s)(1+5s)}$$

Risulta stabile presentando i poli p_1=-1/3 e p_2=-1/5 negativi , però non essendo a sfasamento minimo per avere uno zero positivo z_1=1/2, il criterio di BODE non può essere applicato.

GRUPPO D - CRITERIO DI BODE

Si discuta la stabilità dei sistemi rappresentati a catena aperta dalle seguenti fdt mediante il criterio di BODE.

ESERCIZIO 1D

$$G(s)H(s) == \frac{20(1+s)}{s(1+0{,}16s)(1+10s)}$$

Soluzione

I poli sono: p_1= 0 (ω_{P1} = 0); p_2= - 1/0,16 = - 6,25 (ω_{P2} = 6,25); p_3= - 1/10 = - 0,1 (ω_{P3} = 0,1);

Gli zeri: z_1= -1 (ω_{z1} = 1);

il guadagno statico è uguale a 20.

Diagramma del modulo

Nel tracciamento del modulo in deciBel, si fa notare che:

a. un **POLO** crea una pendenza di **– 20 dB/dec;**
b. un **ZERO** crea una pendenza di **+ 20 dB/dec;**
c. il **guadagno statico** crea una pendenza di **0 dB/dec.**

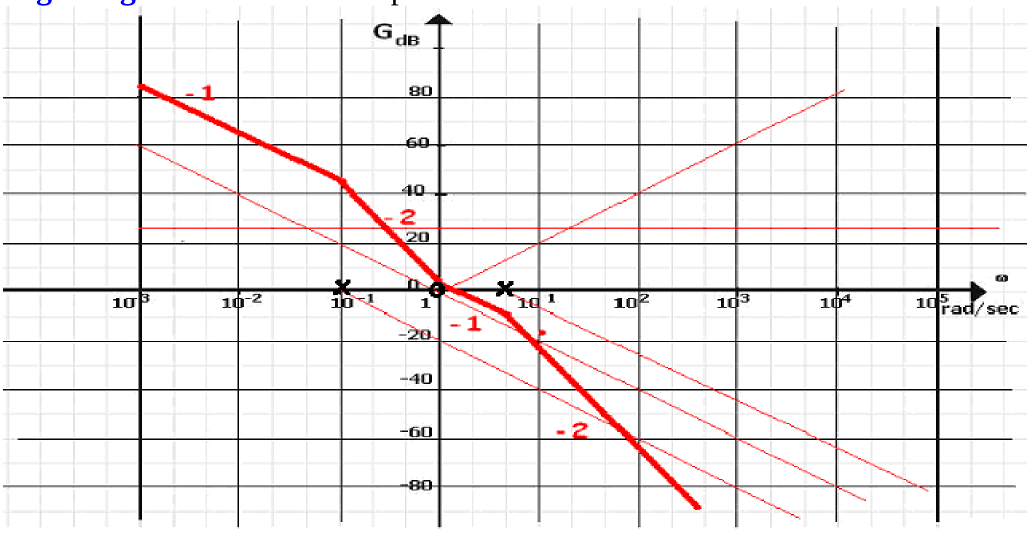
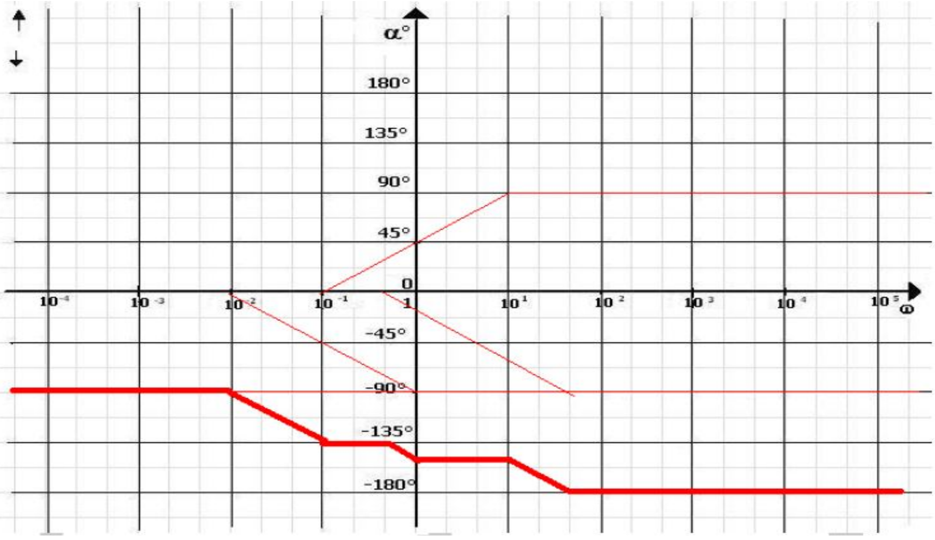


Diagramma della fase:

d. ogni **ZERO** determina uno sfasamento in anticipo di **+ 90°;**
e. ogni **POLO** determina uno sfasamento in ritardo di **– 90°;**
f. il **guadagno statico** determina uno sfasamento di **0°**.



Essendo il modulo della fase, in corrispondenza della ω_t= 2 rad/s a 0 dB , inferiore a 180°, il sistema risulta **STABILE** e il margine di fase ϕ_m=circa 180°-140°= circa 40°.
Lo **sfasamento** in corrispondenza della ω_t= 2 [rad/s] si può determinare applicando la seguente formula:

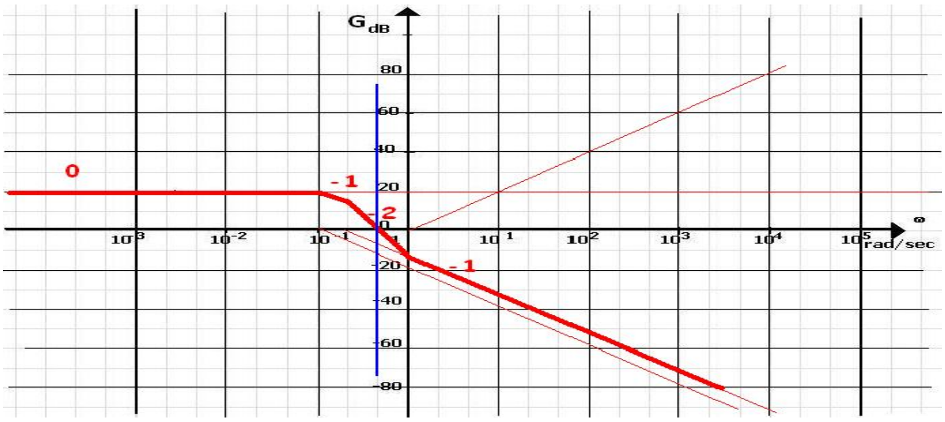
Fase |G(jω)| = fase (K) + fase(1 + jωτ$_1$) + … + fase(1 + jωτ$_m$) – fase[(jω)^g] - fase(1 + jωT$_1$) - … - fase(1 + jωT$_n$)

ϕ_t= ϕ (ω_t)= 0 + arctg ($\omega_t\tau_t$) - g90° - arctg ($\omega_t T_t$)+ arctg ($\omega_2 T_2$) = arctg(2*1) -90°- arctg(2*0.16)-arctg(2*10)= =63.5°-90°-17.7°-87.13°=-131.3°

ESERCIZIO 2D

$$G(s)H(s) == \frac{-10(1+s)}{(1+4s)(1+10s)}$$

Modulo



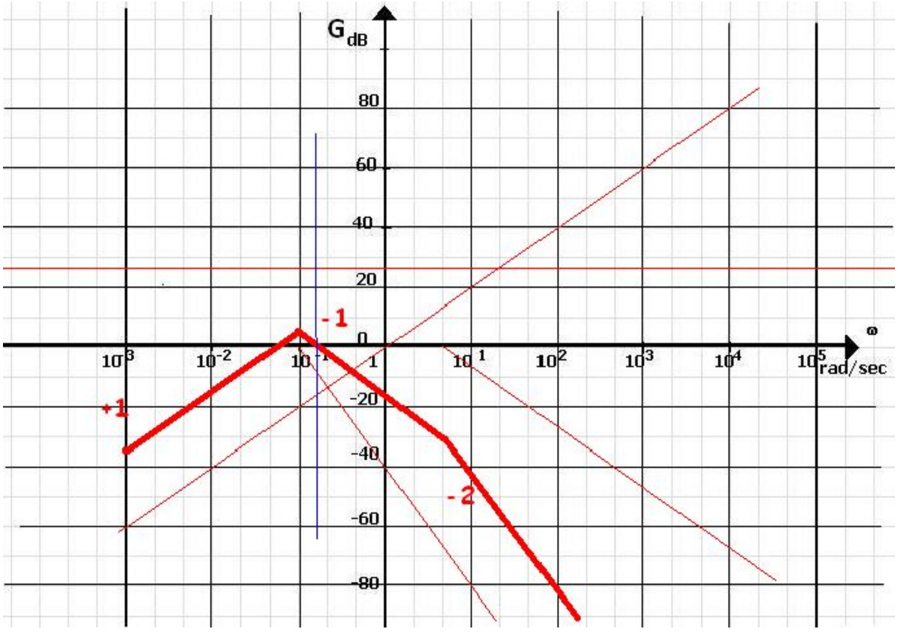
Fase

Il sistema è **INSTABILE**

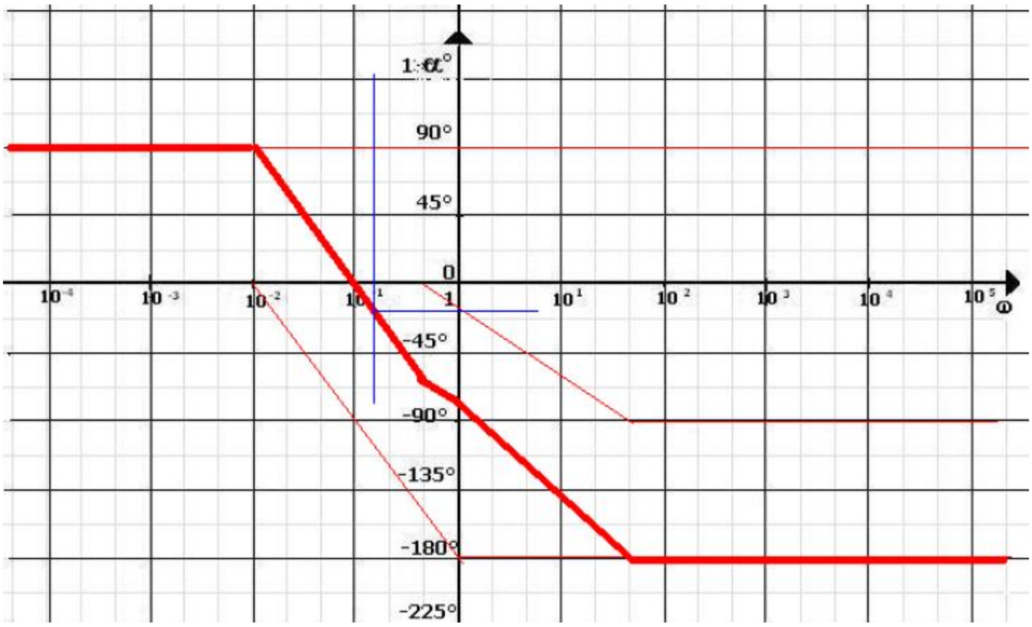
ESERCIZIO 3D

$$G(s)H(s) == \frac{30s}{(1+10s)^2(1+0,2s)}$$

Modulo



Fase



Il sistema è **STABILE**

ESERCIZIO 4D Tracciare i diagrammi cartesiani di Bode di G(jω) :

$$G(j\omega) = \frac{10 \cdot (1+10j\omega)}{1+0,1j\omega}$$

s = jω

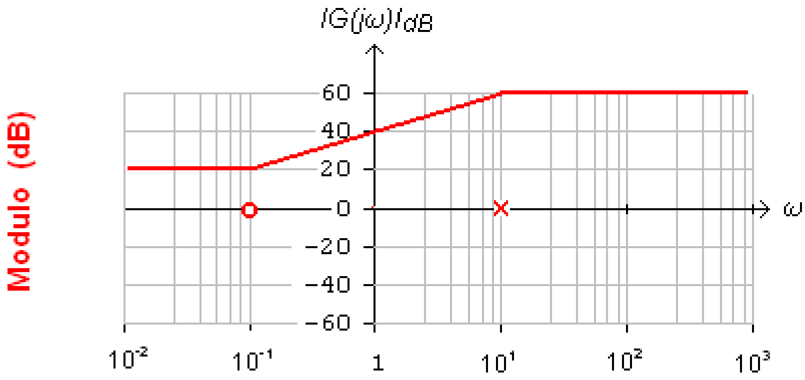
G(s) = 10(1 + 10s) / (1 + 0,1 s) = N(s) / D(s)

- Zeri: N(s) = 0; 10(1+10s) = 0 ; s = - 0,1 = - 10^{-1}
- Poli: D(s) = 0; 1 + 0,1 s = 0; s= - 10

L'ordine del sistema con questa f.d.t è corrisponde al numero dei poli, allora è uno.
Il tipo è dato dal numero di poli all'origine, è di tipo zero, non si ha nessun polo è uguale a zero.

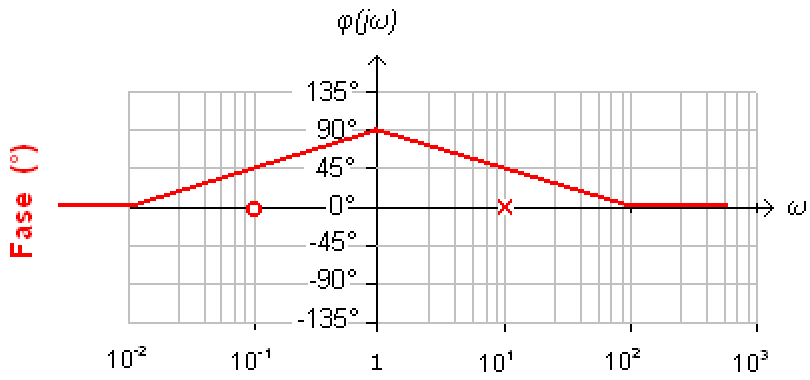
Interpretazione diagramma del modulo:

- K = 10: il modulo corrisponde a 20[dB] orizzontali.
- (1 + j ω10): il modulo per ω10 < 1 oppure ω< 0,1 risulta 0 [dB]. Invece se ω > 0,1 con pendenza di +20[dB]
- (1 + j ω0,1): il modulo per ω 0,1 < 1 oppure ω< 10 risulta 0 [dB]. Invece se ω > 10 con pendenza di -20[dB]



Interpretazione diagramma della fase:

- fase(10) = 0°
- Fase (1 + j ω10) = arctg(10. ω)
  per ω10 < 1 oppure ω< 0,1 la fase risulta 0°, se ω > 0,1 è +90° , invece se ω = 0,1 la fase è 45° .
- - Fase (1 + j0,1 ω) = - arctg(0,1. ω)
  per 0,1.ω < 1 oppure ω< 10 la fase risulta 0°, se ω > 10 è -90° , invece se ω = 10 la fase è -45°



<u>ESERCIZIO 5D</u> Tracciare i diagrammi cartesiani di Bode di G(jω) :

$$G(s) = \frac{10(1 + j\,s)}{s\,.\,(1 + 0{,}1s)}$$

Si tratta di una funzione a uno zero

(z_1 = -1) e due poli di cui uno nell'origine
(p_1 = 0 e p_2 = - 10) e un guadagno statico K = 10.
La risposta in frequenza si ricava, come sempre, sostituendo jω alla variabile s.

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + j\,\omega)}{j\omega\,.\,(1 + 0{,}1j\omega)}$$

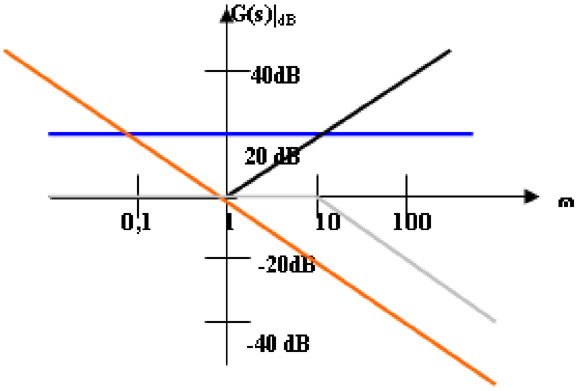
Il modulo in dB è dunque:

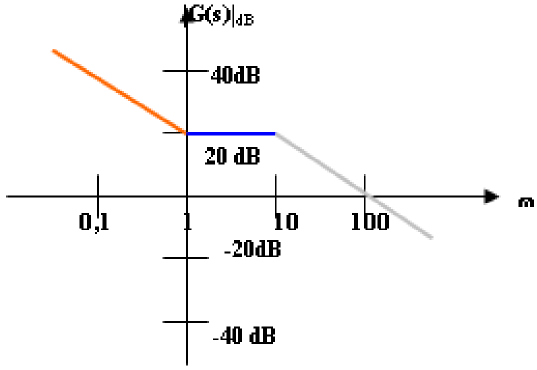
$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot Log_{10} 10 + 20 Log_{10}|1 + j\omega| - 20 Log_{10}\omega - 20 Log_{10}|1 + j0{,}1\omega|$

1° metodo: per disegnare il diagramma di $|G(j\omega)|_{dB}$ occore disegnare i diagrammi singoli.

Si indica con:

- **$G_1 = 20 \cdot Log_{10} 10$:** fornisce un valore costante pari a 20 [dB]
- **$G_2 = 20 Log_{10}|1 + j\omega|$:** per $\omega > 1$ concorre con una pendenza di +20[dB], per $\omega < 1$ è zero.
- **$G_3 = -20 Log_{10}|\omega|$:** concorre con pendenza di – 20[dB] a tutte le **ω** , per $\omega = 1$ è 0[dB].
- **$G_4 = -20 Log_{10}|1 + j0{,}1\omega|$:** per $\omega > 10$ concorre con pendenza – 20[dB], a $\omega < 10$ è zero .



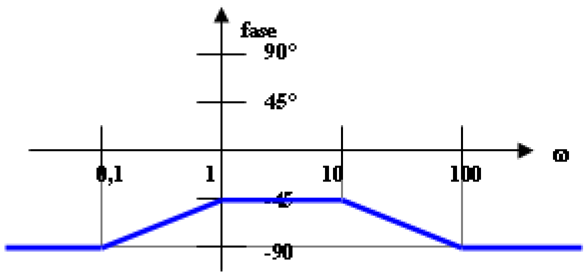


È un sistema stabile, perché taglia l'asse di ω con una pendenza di –20[dB] e poi i poli sono reali negativi o zero.

Per la fase si ha: Fase[G(jω)] = fase(10) + fase(1 + jω) – fase(jω) - fase(1 + j0,1ω)

Fase[G(jω)] = 0° + arctg(ω) – 90° - arctg(0,1ω)

- Per $\omega < 0{,}1$ la fase, risulta: Fase[G(jω)] = 0 + 0 – 90 – 0 = -90°
- Per $0{,}1 < \omega < 1$ risulta: Fase[G(jω)] = 0 + 45 - 90 - 0 = - 45°
- Per $1 < \omega < 10$ risulta: Fase[G(jω)] = 0 + 45 – 90 – 0 = - 45°
- Per $\omega > 10$ risulta: Fase[G(jω)] = 0 + 45 – 90 – 45 = - 90°



ESERCIZIO 6D

$$G(s)H(s) = \frac{10(1+s)^2}{s^2(1+2s)(1+0.1s)}$$

ESERCIZIO 7D

$$G(s)H(s) = \frac{5(1+5s)(1+1.25s)}{(1+50s)(1+0.2s)(1+0{,}1s)}$$

ESERCIZIO 8D

$$G(s)H(s) = \frac{0.5(1+20s)}{(1+2s)(1+0.2s)(1+0{,}05s)}$$