Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

ANELLO DEI QUOZIENTI E LOCALIZZAZIONE

Matteo Curina

Lunedì, 2 Aprile 2007

Seminario di Algebra Superiore I

ANNO ACCADEMICO 2006 - 2007

1 Costruzione dell'anello dei quozienti.

La formazione di anelli dei quozienti e il processo associato di localizzazione sono forse le tecniche più importanti nell'algebra commutativa. La procedura mediante la quale si costruisce l'anello dei razionali $\mathbb{Q}$ dall'anello degli interi $\mathbb{Z}$, si estende facilmente a qualsiasi dominio di integrità A per generare così il suo campo dei quozienti. La costruzione consiste nel prendere l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b), dove $a \in A$ e $b \in A \setminus \{0\} =: A^*$ e imporre la seguente relazione tra le coppie:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

Si prova facilmente che tale relazione è d'equivalenza. Infatti gode delle proprietà:

- **Riflessiva:** $(a, b) \equiv (a, b)$ perchè $ab - ab = 0$;
- **Simmetrica:** se $(a, b) \equiv (c, d)$, cioè se $ad - bc = 0$, allora anche $bc - ad = 0$, cioè $(c, d) \equiv (a, b)$;
- **Transitiva:** se $(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$ e $(c, d) \equiv (e, f) \Leftrightarrow cf - ed = 0$, allora $d(af - be) = daf - dbe = daf - dbe + bcf - bcf = (ad - bc)f + b(cf - de) = 0$, cioè $d(af - be) = 0$; così, dato che A è un **dominio** e $d \neq 0$, si ha che $(af - be) = 0$, cioè $(a, b) \equiv (e, f)$.

Si può dunque passare al quoziente e si riesce a provare che $(A \times A^*)/_{\equiv}$ ha una struttura di campo e per tal motivo è chiamato **campo dei quozienti** di A.

Ci poniamo ora il problema di come poter generalizzare questa estensione, o meglio questa relazione d'equivalenza, ad un anello qualsiasi.

Definizione 1. Sia A un anello. Un **sottoinsieme moltiplicativamente chiuso** di A è un sottoinsieme S di A tale che $1 \in S$ e S è chiuso sotto moltiplicazione, cioè se $s, t \in S$ allora $s \cdot t \in S$.

Definiamo ora su $A \times S$ la seguente relazione $\equiv$:

$$(a,s) \equiv (b,t) \Leftrightarrow (at-bs)u = 0, \text{ per qualche } u \in S.$$

Chiaramente tale relazione gode delle proprietà:

- **Riflessiva:** $(a,s) \equiv (a,s)$ perchè per ogni $t \in S, (as-as)t = 0$;
- **Simmetrica:** se $(a,s) \equiv (b,t)$, cioè se per qualche $u \in S$ si abbia $(at-bs)u = 0$, allora si ha automaticamente che $(bs-at)u = 0$, cioè $(b,t) \equiv (a,s)$;
- **Transitiva:** supponiamo che $(a,s) \equiv (b,t)$ e $(b,t) \equiv (c,u)$. Allora esistono $v, w \in S$ tali che $(at-bs)v = 0$ e $(bu-ct)w = 0$; così $(au-cs)tvw = autvw - cstvw = autvw - bsvuw + bsvuw - cstvw = (at-bs)vuw + (bu-ct)wsv = 0$. Dato che S è **moltiplicativamente chiuso**, abbiamo che $tvw \in S$ e quindi $(a,s) \equiv (c,u)$.

Così facendo abbiamo definito una relazione d'equivalenza e possiamo passare al quoziente. Denotiamo con $\frac{a}{s}$ la classe di equivalenza di (a,s) e sia $S^{-1}A := (A \times S)_{/\equiv}$. Definiamo su $S^{-1}A$ l'addizione e la moltiplicazione tra "frazioni" $\frac{a}{s}$ nel modo usuale, cioè:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Si verifica facilmente che queste definizioni sono ben poste. Infatti supponiamo che $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ e $\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$, cioè supponiamo che esistano $u, v \in S$ tali che $(as' - a's)u = 0$ e $(bt' - b't)v = 0$; così $((at+bs)s't' - (a't' + b's')st)uv = ats't'uv + bss't'uv - a't'stuv - b's'stuv = (as' - a's)utt'v + (bt' - b't)vss'u = 0$ e analogamente $(abs't' - a'b'st)uv = abs't'uv - a'b'stuv = abs't'uv - a'subt'v + a'subt'v - a'b'stuv = (as' - a's)ubt'v + (bt' - b't)va'su = 0$. Dato che S è moltiplicativamente chiuso abbiamo che $uv \in S$ e quindi $\frac{at+bs}{st} = \frac{a't'+b's'}{s't'}$ e $\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}$.

Proposizione 2. *$(S^{-1}A, +, \cdot)$ ha una struttura di anello.*

Quindi:

Definizione 3. $(S^{-1}A, +, \cdot)$ è detto anello dei quozienti o anello delle frazioni di A rispetto a S.

Abbiamo anche un omomorfismo di anelli $f : A \to S^{-1}A$ definito da $f(x) = \frac{x}{1}$, detto omomorfismo naturale. Questo **non** è in generale iniettivo. Infatti $f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow (x-y)s = 0$, per qualche $s \in S$. Ma $(x-y)s = 0$ non implica necessariamente che $x = y$.

Osservazione 4. Se A è un dominio di integrità e $S = A \setminus \{0\}$, allora $S^{-1}A$ è il campo dei quozienti di A. In questo caso dato che A è un dominio l'omomorfismo f di sopra risulta essere iniettivo in quanto la relazione $(x-y)s = 0$ è equivalente a $(x-y) = 0$ dato che $s \neq 0$, cioè $x = y$.

Si ha una proprietà universale.

Proposizione 5. *Sia $g : A \to B$ un omomorfismo di anelli tale che $g(s)$ è un'unità in B per ogni $s \in S$. Allora esiste un unico omomorfismo di anelli $h : S^{-1}A \to B$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

cioè $g = h \circ f$.

Dimostrazione.

∃) Sia $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$. Chiaramente h è un omomorfismo di anelli; dobbiamo solo dimostrare che h sia ben definito. Supponiamo che $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$; allora per qualche $t \in S$ si ha $(as' - a's)t = 0$, perciò $g((as' - a's)t) = 0$, cioè $(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = 0$. Ma dato che $g(t)$ è invertibile, allora $g(a)g(s') = g(a')g(s)$; inoltre poichè $s, s' \in S$ allora $g(s)$ e $g(s')$ sono invertibili e così $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$, cioè $h(\frac{a}{s}) = h(\frac{a'}{s'})$.

!) Se h soddisfa le condizioni, allora $h(\frac{a}{1}) = hf(a) = g(a)$, per ogni $a \in A$; perciò se $s \in S$ allora

$$h(\tfrac{1}{s}) = h((\tfrac{s}{1})^{-1}) = h(\tfrac{s}{1})^{-1} = g(s)^{-1}$$

e perciò $h(\frac{a}{s}) = h(\frac{a}{1})h(\frac{1}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$. Così h è univocamente determinata dalla g.

$\square$

L'anello $S^{-1}A$ e l'omomorfismo $f : A \to S^{-1}A$ godono delle seguenti proprietà:

1) $s \in S \Rightarrow f(s)$ è un'unità in $S^{-1}A$;

2) $f(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ per qualche $s \in S$;

3) ogni elemento di $S^{-1}A$ è della forma $f(a)f(s)^{-1}$ per qualche $a \in A$ e qualche $s \in S$.

Viceversa queste tre condizioni determinano $S^{-1}A$ a meno di isomorfismi. Precisamente:

Proposizione 6. *Siano A e B anelli, $S \subseteq A$ moltiplicativamente chiuso e $g : A \to B$ è un omomorfismo di anelli tale che:*

1) $s \in S \Rightarrow g(s)$ è un'unità in B,

2) $g(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ per qualche $s \in S$,

3) ogni elemento di B è della forma $g(a)g(s)^{-1}$ per qualche $a \in A$ e qualche $s \in S$,

allora esiste un unico isomorfismo $h : S^{-1}A \to B$ tale che $g = h \circ f$, con f omomorfismo canonico.

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 5, dobbiamo solamente mostrare che $h : S^{-1}A \to B$, $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$ (si noti che usiamo la proprietà 1) è un isomorfismo di anelli. Grazie alla proprietà 3, abbiamo che è suriettivo. Mostriamo che h è iniettivo, studiando $ker(h)$: se $h(\frac{a}{s}) = 0$, allora $g(a) = 0$ perciò dalla proprietà 2, si ha che $at = 0$ per qualche $t \in S$, perciò $(a, s) \equiv (0, 1)$ e così $\frac{a}{s} = 0$ in $S^{-1}A$. $\square$

Diamo ora alcuni esempi.

Esempio 7. $S^{-1}A$ è nullo se e solo se $0 \in S$. Infatti $S^{-1}A = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \exists\, t \in S : t = (1 - 0)t = 0 \Leftrightarrow 0 \in S$.

Esempio 8. Se $f \in A$ e sia $S := \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, poniamo A_f al posto di $S^{-1}A$.

Esempio 9. Se $A = \mathbb{Z}$, allora preso $S := A^*$, si ha che $S^{-1}A = \mathbb{Q}$; se $f \in \mathbb{Z}$ e $f \neq 0$ allora A_f è l'insieme di tutti i razionali il cui denominatore è una potenza di f. Ad esempio $\mathbb{Z}_6 = \{\frac{m}{6^n}, n \geqslant 0, m \in \mathbb{Z}\}$. Si noti che $\mathbb{Z}_6 \subset \mathbb{Q}$, quindi rappresenta un insieme totalmente diverso da $\mathbb{Z}/_{(6)}$ classi di resto modulo (6).

Esempio 10. Siano $A = K[x_1, \ldots x_n]$ con K campo e $S := A^*$, allora $S^{-1}A = K(x_1, \ldots x_n) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in K[x_1, \ldots x_n]$ e $g \neq 0\}$, cioè è l'insieme di tutti i polinomi razionali in n variabili. Se $f \in K[x_1, \ldots x_n]$ con $f \neq 0$, allora A_f è l'insieme di tutti i polinomi razionali il cui denominatore è una potenza di f. Ad esempio $K[x]_{x+1} = \{\frac{g}{(x+1)^n}, n \geqslant 0, g \in K[x]\}$. Anche in questo caso dobbiamo stare attenti a non confonderci con $K[x]/_{(x+1)}$.

La costruzione di $S^{-1}A$ può essere ripetuta analogamente con un A-modulo M al posto dell'anello A. Si definisce la relazione $\equiv$ su $M \times S$ come segue: $(m, s) \equiv (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)t = 0$ per qualche $t \in S$. Come prima tale relazione è d'equivalenza, denotiamo così con $\frac{m}{s}$ la classe di equivalenza di (m, s) e con $S^{-1}M$ l'insieme di tali "frazioni". Possiamo rendere $S^{-1}M$ un $(S^{-1}A)$-modulo con le ovvie definizioni di addizione e moltiplicazione per scalari. Come sopra scriviamo M_f invece di $S^{-1}M$ con $S := \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Ideali estesi e contratti nell'anello dei quozienti.

Siano A, B due anelli, $f : A \to B$ un omomorfismo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ e $\mathfrak{b} \subseteq B$ due ideali. Denotiamo con $\mathfrak{a}^e := (f(\mathfrak{a}))$ l'estensione di $\mathfrak{a}$ in B, e con $\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$ la contrazione di $\mathfrak{b}$ in A. Così $\mathfrak{a}^e$ si dirà ideale esteso e $\mathfrak{b}^c$ ideale contratto. Si provano facilmente le seguenti proprietà:

Proposizione 11.

i) $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$,

ii) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$,

iii) $\mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c$,

iv) $\mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e$.

Sia A un anello, S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A e $f : A \to S^{-1}A$, $f(a) = \frac{a}{1}$ l'omomorfismo naturale.

Siano C l'insieme degli ideali contratti ed E l'insieme degli ideali estesi mediante f. Notiamo che se $\mathfrak{a}$ è un ideale in A, la sua estensione $\mathfrak{a}^e$ in $S^{-1}A$ è $S^{-1}\mathfrak{a}$. Infatti se $y \in \mathfrak{a}^e$, allora y è della forma $\sum_{\text{finita}} \frac{a_i}{s_i}$, con $a_i \in \mathfrak{a}$ e $s_i \in S$. Se scriviamo tale somma a comun denominatore allora osserviamo che $y = \frac{a}{s}$, con $a \in \mathfrak{a}$ e $s \in S$, cioè $y \in S^{-1}\mathfrak{a}$

Proposizione 12.

1) *Ciascun ideale in $S^{-1}A$ è un ideale esteso, più precisamente se $\mathfrak{b}$ è un ideale di $S^{-1}A$, allora $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$;*

2) $\mathfrak{a} \in C \Leftrightarrow$ *nessun elemento di S è uno zero divisore in $A/\mathfrak{a}$.*

Dimostrazione.

1) Sappiamo che in generale vale $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$ (vedi proposizione 11, proprietà (i)). Dimostriamo ora il viceversa. Sia $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Si ha che $f(x) = \frac{x}{1} = \frac{x}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{b}$ dato che $\frac{s}{1} \in S^{-1}A$ e $\mathfrak{b}$ è un ideale. Perciò $x \in f^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c$, così $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$ e quindi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{ce}$. Da cui $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$.

2) $\mathfrak{a} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$. Infatti, se $\mathfrak{a}$ è contratto, allora si ha che esiste $\mathfrak{b}$, ideale di $S^{-1}A$, tale che $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$. Grazie alla proprietà (iii) della proposizione 11, si ha che $\mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c$ e quindi $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$, cioè $\mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$. Viceversa, se $\mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$ allora $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$ grazie alla proprietà (ii) della proposizione 11; così se poniamo $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}^e$, si ha che $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$, cioè $\mathfrak{a} \in C$. Ora $\mathfrak{a}^{ec} = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in S\}^c = \{x \in A \mid \exists\, a \in \mathfrak{a}, s \in S :\ \frac{x}{1} = \frac{a}{s}\} = \{x \in A \mid \exists\, u, s \in S,\ a \in \mathfrak{a} :\ (xs - a)u = 0\} =$ poniamo $(su = t)$ $= \{x \in A \mid \exists\, u, t \in S,\ a \in \mathfrak{a} :\ xt = au\} = \{x \in A \mid \exists\, t \in S :\ tx \in \mathfrak{a}\}$. Infatti se x è tale che $tx = ua$, allora $tx \in \mathfrak{a}$; viceversa se $tx \in \mathfrak{a}$, allora $tx = 1 \cdot a'$ con $a' \in \mathfrak{a}$ e $1 \in S$. Così $\mathfrak{a}^{ec} = \{x \in A \mid \exists\, t \in S :\ tx \in \mathfrak{a}\}$. Quindi $\mathfrak{a} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a} \Leftrightarrow (tx \in \mathfrak{a}$ per qualche $t \in S \Rightarrow x \in \mathfrak{a}) \Leftrightarrow$ nessun $t \in S$ è uno zero-divisore in $A/\mathfrak{a}$.

□

Corollario 13. *Se $\mathfrak{R}$ è l'ideale nilradicale di A, il nilradicale di $S^{-1}A$ è $S^{-1}\mathfrak{R}$.*

Lemma 14. *Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di un anello A, $S \subseteq A$ moltiplicativamente chiuso e $\pi : A \to A/\mathfrak{p}$ la proiezione canonica. Allora*

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \pi(S)^{-1}(A/\mathfrak{p}) \tag{1}$$

Dimostrazione. Si noti che $\pi(S)$ è moltiplicativamente chiuso in $A/\mathfrak{p}$. Infatti $[1] \in \pi(S)$, dato che $1 \in S$; se poi $[a], [b] \in \pi(S)$, cioè se $a, b \in S$ allora $a \cdot b \in S$ e quindi $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] \in \pi(S)$. Distinguiamo due casi:

Caso 1) $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. Sappiamo che esiste un $x \in \mathfrak{p} \cap S$; così $0 = [x] \in \pi(S)$ e quindi (vedi esempio 7) $\pi(S)^{-1}(A/\mathfrak{p}) = 0$. Inoltre $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$, perchè se $x \in \mathfrak{p} \cap S$, allora $\frac{x}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ è invertibile e quindi $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} = 0$.

Caso 2) $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Sia

$$\varphi : S^{-1}A \to \pi(S)^{-1}(A/\mathfrak{p}), \quad \varphi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{[a]}{[s]}$$

Così se $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, cioè se esiste un $t \in S$ tale che $(as' - a's)t = 0$, allora $([a][s'] - [a'][s])[t] = [0]$, cioè $\frac{[a]}{[s]} = \frac{[a']}{[s']}$. Quindi φ è ben definita. Inoltre si osserva che è anche un omomorfismo di anelli suriettivo e quindi $S^{-1}A\big/_{ker\varphi} \cong \pi(S)^{-1}(A\big/_{\mathfrak{p}})$ per il teorema di fattorizzazione degli omomorfismi. Ora $ker\varphi = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid \frac{[a]}{[s]} = [0]\} = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid \exists\, u \in S:\ [u]\cdot[a] = [0]\} = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \cdot u \in \mathfrak{p}\} = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{p}\} = S^{-1}\mathfrak{p}$. Infatti dato che $\mathfrak{p}$ è primo, se $a \cdot u \in \mathfrak{p}$, allora $u \in \mathfrak{p}$ o $a \in \mathfrak{p}$. Ma $u \in S$ che ha intersezione disgiunta con $\mathfrak{p}$; perciò u non sta in $\mathfrak{p}$.

□

Proposizione 15. *Gli ideali primi di $S^{-1}A$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di A che non incontrano S.*

Dimostrazione. Dimostriamo che:

$$\{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ primo}, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \leftrightarrow \{\mathfrak{q} \subset S^{-1}A \mid \mathfrak{q} \text{ primo}\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \rightarrow & \mathfrak{p}^e \\ \mathfrak{q}^c & \leftarrow & \mathfrak{q} \end{array}$$

Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primo in $S^{-1}A$, allora $\mathfrak{q}^c$ è un ideale primo in A. Supponiamo che esista un $x \in \mathfrak{q}^c \cap S$, allora si ha $\frac{x}{1} \in \mathfrak{q}$ e quindi $\mathfrak{q} = S^{-1}A$, contraddicendo l'ipotesi $\mathfrak{q}$ primo. Viceversa, sia $\pi : A \rightarrow A\big/_{\mathfrak{p}}$ la proiezione canonica. Grazie al lemma 14 si ha $S^{-1}A\big/_{S^{-1}\mathfrak{p}} \cong \pi(S)^{-1}(A\big/_{\mathfrak{p}})$. Poichè $\mathfrak{p}$ è un ideale primo in A, allora $A\big/_{\mathfrak{p}}$ è un dominio di integrità; inoltre dato che $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, allora $\pi(S) \subseteq (A\big/_{\mathfrak{p}}) \setminus \{0\}$ e perciò $\pi(S)^{-1}(A\big/_{\mathfrak{p}})$ è un sottoanello del campo dei quozienti di $A\big/_{\mathfrak{p}}$. Perciò $S^{-1}A\big/_{S^{-1}\mathfrak{p}} \cong \pi(S)^{-1}(A\big/_{\mathfrak{p}})$ è un dominio e quindi $S^{-1}\mathfrak{p}$ è primo. Le due applicazioni sono dunque ben definite.

Dimostriamo che sono una l'inversa dell'altra. Grazie alla proprietà (1) della proposizione 12, $\mathfrak{q}^{ce} = \mathfrak{q}$. Proviamo che $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$. Si noti che $\mathfrak{p}^{ec} = f^{-1}(\{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{p}, s \in S\}) = \{b \in A \mid \frac{b}{1} = \frac{a}{s},$ per qualche $a \in \mathfrak{p}, s \in S\} = \{b \in A \mid \exists\, u, s \in S, a \in \mathfrak{p}:\ (bs - a)u = 0\} = \{b \in A \mid b \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$; infatti se $ubs = ua \in \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo, allora $us \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$; ma dato che

$us \in S$ e $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, ne segue che us non appartiene a $\mathfrak{p}$ e perciò deve essere $b \in \mathfrak{p}$. $\square$

3 Localizzazione e anelli locali.

Definizione 16. Un anello A si dice **anello locale** se ha esattamente un unico ideale massimale.

Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A anello e $S := A \backslash \mathfrak{p}$. Si ha che 1 non appartiene a $\mathfrak{p}$ e così $1 \in S$. Se poi $s, t \in S$, allora s, t non stanno in $\mathfrak{p}$ e quindi se $s \cdot t \in \mathfrak{p}$, allora $s \in \mathfrak{p}$ o $t \in \mathfrak{p}$ dato che $\mathfrak{p}$ è primo; ma questo non è possibile e dunque $s \cdot t \in S$. Abbiamo così dimostrato che S è moltiplicativamente chiuso e in questo caso scriviamo $A_\mathfrak{p}$ al posto di $S^{-1}A$. Sia ora $\mathfrak{m} := \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}\}$. Si osserva facilmente che $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{p}$, e quindi $\mathfrak{m}$ è un ideale. Inoltre se $\frac{b}{t}$ non appartiene a $\mathfrak{m}$, allora b non appartiene a $\mathfrak{p}$, quindi $b \in S$, cioè $\frac{b}{t}$ è un'unità in $A_\mathfrak{p}$. Così se $\mathfrak{a}$ è un ideale in $A_\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$, allora $\mathfrak{a}$ contiene un'unità ed è perciò l'intero anello. Cioè $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale in $A_\mathfrak{p}$, e quindi $A_\mathfrak{p}$ è un **anello locale**. Il passaggio da A ad $A_\mathfrak{p}$ è chiamata **localizzazione** in $\mathfrak{p}$. Analogamente se M è un A-modulo scriviamo $M_\mathfrak{p}$ invece di $S^{-1}M$ con $S := A \setminus \{\mathfrak{p}\}$ ($\mathfrak{p}$ primo).

Proposizione 17. *Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A, gli ideali primi dell'anello locale $A_\mathfrak{p}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di A contenuti in $\mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Basta prendere $S := A \setminus \mathfrak{p}$ nella proposizione 15. Inoltre un ideale primo $\mathfrak{q} \subset A$ è tale che $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

Proposizione 18. *Siano A un anello, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ideali primi con $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$; allora:*

$$(A_\mathfrak{p})\big/_{\mathfrak{q}^e} \cong \left(A\big/_{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}^e}.$$

Dimostrazione. Segue dal lemma 14, tenendo presente che, posto $\pi : A \to A\big/_{\mathfrak{q}}$ proiezione canonica e $S := A \setminus \mathfrak{p}$, allora $\pi(S) = \pi(A \setminus \mathfrak{p}) = (A\big/_{\mathfrak{q}}) \setminus \pi(\mathfrak{p})$. $\square$

Corollario 19. *Siano A un anello, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ideali primi con $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$; allora $(A_\mathfrak{p})\big/_{S^{-1}\mathfrak{q}}$, con $S := A \setminus \mathfrak{p}$, ha come ideali primi gli ideali primi $\mathfrak{a}$ di A tali che $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.*

Così nel passare da A in $A_\mathfrak{p}$ togliamo via tutti gli ideali primi tranne quelli contenuti in $\mathfrak{p}$, mentre nell'altra direzione, nel passare da $A_\mathfrak{p}$ in A togliamo via tutti gli ideali primi tranne quelli contenenti $\mathfrak{p}$. Perciò se $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ sono due ideali primi, allora studiando $(A_\mathfrak{p})\big/_{\mathfrak{q}^e}$, restringiamo la nostra attenzione a quegli ideali primi che giacciono tra $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$. In particolare se $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ci ritroviamo con un campo chiamato campo residuo a $\mathfrak{p}$ ($K(\mathfrak{p}) := (A_p)\big/_{\mathfrak{p}^e}$) che è isomorfo al campo dei quozienti del dominio di integrità $A\big/_{\mathfrak{p}}$.

Esempio 20. Se $p \in \mathbb{Z}$ è un primo, allora $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, p$ non divide $n\}$. Si noti che $\mathbb{Z}_{(p)} \neq \mathbb{Z}_p$, definito nell'esempio 9, ed entrambi sono differenti da $\mathbb{Z}\big/_{(p)}$ classi di resto modulo (p).

Esempio 21. $K[x]_{(x+1)} = \{\frac{g}{h}, g \in K[x], x+1$ non divide $h\}$. Anche in questo caso $K[x]_{(x+1)} \neq K[x]_{x+1}$, definito nell'esempio 10, ed entrambi sono differenti da $K[x]\big/_{(x+1)}$ classi di resto modulo $(x+1)$.