Programma di fisica 2

Legge di Coulomb

$\overline{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon d^2}\overline{a}_r$ (nella direzione della congiungente delle cariche)

ε permettività $\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]\left[\frac{F}{m}\right]$

ε_0 permettività nel vuoto $8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ ε_r permettività relativa o costante dielettrica di un certo materiale

Principio di sovrapposizione degli effetti

Intensità del campo elettrico

Campo elettrico di una carica:
a_r è il vettore che congiunge la carica al punto dove si calcola **E**
r è il modulo di tale distanza

$\overline{E} = \frac{\overline{F}_p}{Q_p} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}a_r\ \left[\frac{N}{C}\right]\left[\frac{V}{m}\right]$(nella direzione della congiungente delle cariche)

Densità di carica:

$\rho = \frac{dQ}{d\upsilon}\left[\frac{C}{m^3}\right]$ Volume

$\rho_s = \sigma = \frac{dQ}{dS}\left[\frac{C}{m^2}\right]$ Superficie

$\rho_l = \lambda = \frac{dQ}{dl}\left[\frac{C}{m}\right]$ Lineare

Distribuzione di carica continua:
a_r è il vettore che congiunge la carica al punto dove si calcola **E**
r è il modulo di tale distanza

$d\overline{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overline{a}_r$

$\overline{E} = \int_\upsilon \frac{\rho\ \overline{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}d\upsilon$ campo elettrico di una distribuzione di carica di volume

$\overline{E} = \int_S \frac{\rho_s \overline{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$campo elettrico di una distribuzione di carica di superficie

$\overline{E} = \int_l \frac{\rho_l \overline{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dl$campo elettrico di una distribuzione di carica lineare

Campo elettrico di una distribuzione di carica lineare rettilinea infinita:
con ρ_l costante

$\overline{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\overline{a}_r$ (in coordinate cilindriche con la linea coincidente con l'asse z)

Campo elettrico di una distribuzione di carica piana infinita:
con ρ_s costante

$\overline{E} = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\overline{a}_n$ (dove a_n è il versore normale al piano)

Flusso

Il flusso elettrico Ψ ha origine su una carica positiva e termina su una carica negativa, una carica di un C da origine ad un flusso di un C.
Densità di flusso elettrico **D**.

$\overline{D} = \dfrac{d\Psi}{dS}\overline{a}$ con dS perpendicolare ad a

Presa una superficie dS non è detto che sia perpendicolare a **D**, quindi **D** forma un angolo θ con la normale a dS, quindi

$d\Psi = DdS\cos\theta = \overline{D}\bullet d\overline{S}$ con $d\overline{S} \| \overline{a}$

Legge di Gauss

Il flusso complessivo che esce da una superficie chiusa è pari alla carica netta Q racchiusa dentro la superficie.

$$\Psi = \oint_S \overline{D}\bullet d\overline{S} = Q$$

$\overline{D} = \varepsilon\,\overline{E}$ per un mezzo isotropo di permettività ε

Da notare che quando si ha a che fare con più mezzi con diverse permettività conviene ragionare in termini di **D** che non dipende dal mezzo e poi passare per ogni mezzo ad **E** con la relativa permettività.

Divergenza

Se la divergenza di un campo vettoriale è diversa da 0 si dice che la regione contiene sorgenti o pozzi.

$$div\overline{A} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\oint_{S(u)} \overline{A}\bullet d\overline{S}}{\Delta u}$$

$div\overline{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ in coordinate cartesiane

$div\overline{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ in coordinate cilindriche

$div\overline{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$ in coordinate sferiche

Divergenza di **D**

$$div\overline{D} = \lim_{\Delta\upsilon\to 0}\frac{\oint_{S(\upsilon)} \overline{D}\bullet d\overline{S}}{\Delta\upsilon} = \lim_{\Delta\upsilon\to 0}\frac{Q}{\Delta\upsilon} = \rho$$

$div\overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ Equazione di Maxwell

$div\overline{E} = \overline{\nabla}\bullet\overline{E}$ con $\overline{\nabla} = \dfrac{\partial()}{\partial x}\overline{a}_x + \dfrac{\partial()}{\partial y}\overline{a}_y + \dfrac{\partial()}{\partial z}\overline{a}_z$

Teorema della divergenza

$$\oint_{S(\upsilon)} \overline{A}\bullet d\overline{S} = \int_\upsilon (\overline{\nabla}\bullet\overline{A})d\upsilon$$

per **D**

$$\oint_{S(\upsilon)} \overline{D} \bullet d\overline{S} = \int_{\upsilon} (\overline{\nabla} \bullet \overline{D}) d\upsilon$$

per **E**

$$\oint_{S(\upsilon)} \overline{E} \bullet d\overline{S} = \int_{\upsilon} (\overline{\nabla} \bullet \overline{E}) d\upsilon$$

Lavoro per spostare una carica

$$dW = -q\overline{E} \bullet d\overline{l}$$

Il lavoro fatto su un percorso chiuso è nullo quindi $\oint \overline{E} \bullet d\overline{l} = 0$ (per campi statici)

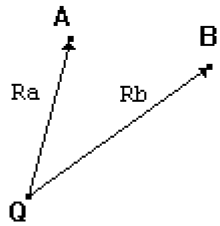
Il campo vettoriale **E** è conservativo.

Potenziale elettrico tra due punti

Per potenziale elettrico tra i punti A e B si intende il lavoro per spostare una carica positiva da A a B.

$$V_{AB} = \frac{W}{Q_u} = -\int_B^A \overline{E} \bullet d\overline{l} \quad \left[\frac{J}{C}\right] = [V]$$

Potenziale di una carica puntiforme



$$V_{AB} = -\int_B^A \overline{E} \bullet d\overline{l} = -\int_{r_B}^{r_A} \overline{E} \bullet d\overline{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Se ora facciamo tendere B a infinito e lo prendiamo come potenziale di riferimento uguale a 0 avremo che

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

Potenziale di una distribuzione di carica

$V_A = \int_{\upsilon} \frac{\rho d\upsilon}{4\pi\varepsilon_0 R}$ dove R è la distanza tra A e il volumetto infinitesimo dv

Gradiente

$\overline{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$ in coordinate cartesiane

Il gradiente di una funzione potenziale è un campo vettoriale, normale ovunque alle superfici equipotenziali.

$\overline{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} a_r + \frac{\partial V}{r\partial \phi} a_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$ in coordinate cilindriche

$\overline{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} a_r + \frac{\partial V}{r\partial \theta} a_\theta + \frac{\partial V}{r\sin\theta\partial \phi} a_\phi$ in coordinate sferiche

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V$$

Energia dei campi elettrostatici

Distribuzioni discrete

$W_E = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_m V_m$ con $V_m = \left(V_{m,1} + V_{m.2} + ... + V_{m,n}\right)$ e $V_{i,j}$ potenziale al punto j dovuto alla carica del punto 1 nel punto 1.

Distribuzioni continue

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho V d\upsilon = \frac{1}{2}\int \overline{D} \bullet \overline{E} d\upsilon = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\upsilon = \frac{1}{2}\int \frac{D^2}{\varepsilon} d\upsilon$$

Energia immagazzinata da un condensatore

$$W_E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Legge di Ohm

$I = \frac{V}{R}$ in corrente continua $\left[\frac{C}{s}\right] = [A]$

J densità di corrente $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

Corrente di convezione

Un insieme di particelle cariche che dà luogo a una densità ρ in un volume v dotato di una velocità U, nel momento che questa configurazione di carica passa attraverso una superficie (di osservazione) da origine a una corrente di convezione di densità $\overline{J} = \rho\overline{U}$

Corrente di conduzione

In un conduttore di sezione costante $\overline{J} = \rho\overline{U}$ e poiché $\overline{U} = \mu\overline{E}$ dove μ è detta mobilità ed è una costante che dipende dal materiale e dalle sue condizioni.

Si ha inoltre che $\overline{J} = \sigma\overline{E}$ (forma puntuale della legge di Ohm) dove $\sigma = \rho\mu$ è la conduttività.

Corrente I

$$I = \int_S \overline{J} \bullet d\overline{S}$$

Resistenza R

Se agli estremi di un conduttore di sezione A e lunghezza l viene applicata una tensione V si ha $\overline{E} = \frac{V}{l}\overline{l}$ e $\overline{J} = \frac{\sigma V}{l}\overline{l}$ e quindi $\overline{I} = \overline{J}A = \frac{\sigma A V}{l}\overline{l}$ dunque poiché $V = RI \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma A}$ $[\Omega]$

Questo vale se J è costante all'interno del conduttore, se J non è costante ma la corrente scorre sulla superficie del conduttore (effetto pelle) si ha che $R = \frac{V}{\int_S \overline{J} \bullet d\overline{S}} = \frac{\int_l \overline{E} \bullet d\overline{l}}{\int_S \sigma\overline{E} \bullet d\overline{S}}$.

Continuità della corrente

Prendiamo in esame una superficie chiusa, perché un pò di corrente -netta- possa uscite dovremo avere una diminuzione di carica all'interno, quindi $\oint_S \overline{J} \bullet d\overline{S} = I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\upsilon \rho d\upsilon$

dividendo per $\Delta\upsilon$ si ha $\frac{\oint_S \overline{J} \bullet d\overline{S}}{\Delta\upsilon} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\int_\upsilon \rho\, d\upsilon}{\Delta\upsilon}$

se $\Delta\upsilon \to 0$ si ha che $\frac{\oint_S \overline{J} \bullet d\overline{S}}{\Delta\upsilon} \to \overline{\nabla} \bullet \overline{J}$ e $-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\int_\upsilon \rho\, d\upsilon}{\Delta\upsilon} \to -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ quindi $\overline{\nabla} \bullet \overline{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (Equazione di continuità della corrente)

Poiché $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ può essere diverso da zero solo in un transitorio si ha che $\overline{\nabla} \bullet \overline{J} = 0$ (Equazione della legge di Kirchhoff).

La legge di Kirchhoff dice che la corrente netta che esce da un nodo dove entrano più conduttori è zero.

Se una qualche carica netta è presente in un conduttore, essa deve trovarsi sulla superficie esterna.

Polarizzazione e permittività relativa

In un campo elettrico i materiali dielettrici si polarizzano, ne consegue che la densità di flusso elettrico **D** risulta maggiore di quella che sarebbe nello spazio libero con la stessa intensità di campo.

Se definiamo **P** il momento di dipolo per unità di volume $\overline{P} = \lim_{\Delta\upsilon \to 0} \frac{\mu \overline{p}}{\Delta\upsilon}$ possiamo dire che $\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$.

Nei materiali isotropi lineari dove **E**//**P** possiamo scrivere $\overline{P} = \chi_e \varepsilon_0 \overline{E}$ dove definiremo la suscettività dielettrica $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ dove $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ viene detto permittività relativa.

D ed E assegnata la tensione

Un condensatore piano vuoto all'interno con applicata una differenza di potenziale V mi darà

$$\overline{E} = \frac{V}{d}\overline{a}_n \quad \overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} = \frac{\varepsilon_0 V}{d}\overline{a}_n \quad D_n = \rho_s = \frac{Q}{A}$$

se riempio lo spazio interno al condensatore con un dielettrico con permittività relativa ε_r avrò

$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}$ e quindi $\overline{E} = \frac{V}{d}\overline{a}_n$ $\quad \overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{E}$ poiché $|\overline{D}| = \rho_s$ e **D** aumenta avrò un aumento di carica sulle armature.

D ed E assegnata la carica

Prendiamo in considerazione un condensatore piano che ha una carica +Q su un armatura e -Q sull'altra, tra le due armature c'è il vuoto quindi $D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} \quad \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\overline{a}_n$.

Se riempiamo lo spazio interno al condensatore con un dielettrico con permittività relativa ε_r avremo

$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} \quad \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\overline{a}_n$ quindi **E** diminuisce di un fattore $\frac{1}{\varepsilon_r}$.

Condizioni al contorno

1) La componente tangenziale di **E** è continua attraverso l'interfaccia dei dielettrici.

$$E_{t1} = E_{t2}$$

2) La componente normale di **D** presenta una discontinuità di grandezza $|\rho_s|$ attraverso l'interfaccia dei dielettrici.

$$D_{n1} - D_{n2} = -\rho_s$$

In genere l'interfaccia non avrà cariche libere e quindi

$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

Capacità e condensatori

Ogni coppia di conduttori separati dallo spazio vuoto o da un dielettrico, possiede una capacità.

La capacità C è definita come $C = \frac{Q}{V} \quad \left[\frac{C}{V}\right][F]$ farad.

Condensatori in parallelo

$C_{eq} = C_1 + C_2$

Condensatori in serie

$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Energia immagazzinata in un condensatore

$W_e = \frac{1}{2}\int \overline{E} \bullet \overline{D} d\upsilon$

Se si ha la presenza di un dielettrico ε_r

$$\overline{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\overline{E} \text{ quindi } W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 d\upsilon = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_0 E^2 + \overline{P}\bullet\overline{E}) d\upsilon$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2$$

Equazioni di Laplace

L'equazione di Laplace fornisce un metodo con il quale si può ricavare la funzione potenziale V nelle condizioni impostate dai conduttori al contorno.

Prese inesame la tre equazioni $\overline{\nabla}\bullet\overline{D} = \rho$ $\varepsilon\ \overline{E} = \overline{D}$ $-\overline{\nabla}V = \overline{E}$ possiamo scrivere

$$\overline{\nabla}\bullet\varepsilon\left(-\overline{\nabla}V\right) = \rho$$

Se il mezzo è omogeneo possiamo estrarre e e quindi

$$\overline{\nabla}\bullet\overline{\nabla}V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ (Equazione di Poisson)}$$

Se la regione di spazio considerata è priva di cariche allora avremo

$$\nabla^2 V = 0 \text{ (Equazione di Laplace)}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ in coordinate cartesiane}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ in coordinate cilindriche}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \text{ in coordinate sferiche}$$

Teorema di unicità

Se le condizioni al contorno sono bene specificate le soluzioni delle equazioni di Poisson e di Laplace sono uniche.

Teorema del valore medio e del valore massimo

In regioni libere da carica avremo i due seguenti risultati:
1) Al centro di un cerchio, o di una sfera, che si trovano nella regione, il potenziale V è pari alla media dei valori che esso assume sul cerchio o sulla sfera.
2) Il potenziale V non può avere un massimo o un minimo in un punto interno alla regione in esame.
Dalla 2 segue che il potenziale massimo o minimo si troverà sul contorno della regione.

ELETTROMAGNETISMO

Legge di Biot - Savart

Prendiamo in esame un elementodifferenziale di corrente Idl, risulterà un intensità di campo magnetico differenziale dH tale che: $d\overline{H} = \frac{Id\overline{\ell} \times a_R}{4\pi R^2}$ $\left[\frac{A}{m}\right]$ forma differenziale

R va dall'elemento di corrente al punto dove si calcola dH.

$\overline{H} = \oint \frac{Id\overline{\ell} \times a_R}{4\pi R^2}$ forma integrale (L'integrale circuitato richide che si tenga conto di tutti gli elementi di corrente, il contorno può chiudersi anche all'infinito.)

Sostituendo Idl con KdS o Jdv possiamo calcolare campi magnetici dovuti a foli o volumi dove scorre corrente.

Legge di Ampere

Lintegrale della componente tangenziale di **H** attorno ad un cammino chiuso è pari alla corrente abbracciata dal cammino stesso.

$$\oint \overline{H} \bullet d\overline{\ell} = I_{enc}$$

Generalmente questa relazione viene usata per ricavarsi **H** a partire da un dato **I**. Per fare ciò il problema deve godere di un alto grado di simmetria e deve soddisfare le seguenti relazioni:
1) In ogni punto del cammino chiuso, **H** deve risultare tangente o normale al cammino stesso.
2) **H** deve avere lo stesso valore in tutti i punti del cammino in cui risulta tangente.

Rotore

Il rotore di un campo vettoriale A è un campo vettoriale.

$$\mathrm{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) a_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) a_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) a_z$$ Coordinate cartesiane

in coordinate cartesiane possiamo vedere il rotore anche come

$$\mathrm{rot}\overline{A} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$ oppure $\mathrm{rot}\overline{A} = \overline{\nabla} \times \overline{A}$

$$\mathrm{rot}\overline{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) a_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) a_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right] a_z$$ in coordinate cilindriche

$$\mathrm{rot}\overline{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (A_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] a_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right] a_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] a_\phi$$ in coordinate sferiche

Prorietà utili del rotore

$\overline{\nabla} \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{A}) = 0 \quad \forall \overline{A}$

$\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} f) = 0 \quad \forall f$ scalare di posizione.

Quindi possiamo dire che $\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} V) = \overline{\nabla} \times \overline{E} = 0$

Avremo inoltre che $\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J}$ quindi dato **H** per una certa regione di spazio, avremo una certa J nella stessa regione di spazio.

Densità di flusso magnetico B

$\overline{B} = \mu \overline{H} \quad [T] = \left[\frac{N}{A \cdot m}\right]$ Tesla

$\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilità del mezzo, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right]$ [henry per metro] permeabilità assoluta, μ_r permeabilità relativa è un numero puro.

Il flusso magnetico Φ attraverso una superficie è definito dalla $\Phi = \int_S \overline{B} \bullet d\overline{S} \quad [Wb]$ Weber

$[T] = \left[\frac{Wb}{m}\right] \quad [H] = \left[\frac{Wb}{A}\right]$

Le linee di flusso magnetico sono curve chiuse senza inizio o fine. Tutto il flusso entrante in una superficie chiusa deve anche uscire. **B** non ha ne sorgenti ne pozzi, quindi $\overline{\nabla} \bullet \overline{B} = 0$.

Potenziale magnetico vettore A

$$\overline{\nabla} \times \overline{A} = \overline{B} \quad [\overline{A}] = \left[\frac{Wb}{m}\right]$$

Teorema di Stokes

Sia C(S) una curva che racchiude una superficie S il teorema di Stokes dice che:

$$\oint_C \overline{A} \bullet d\overline{\ell} = \int_S \overline{B} \bullet d\overline{S} = \Phi$$