Esercitazioni: Francesco Di Plinio - `francesco.diplinio@libero.it`

Le soluzioni (complete) delle esercitazioni 5 e 6 saranno disponibili online a partire da lunedì.

Confronto asintotico.

6.1 Limiti notevoli. I seguenti limiti sono da considerare limiti notevoli. La maggior parte è stata dimostrata ad esercitazione a partire da (i), (ii), (iii).

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$

(iii) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$ (iv) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a\ ;$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1;$ (vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0.$

6.2 Infinitesimi ed infiniti. Siano f e g due funzioni definite in un intorno di x_0 (tranne che al più in x_0 stesso): f è un *infinitesimo* per $x \to x_0$ se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$; f è un*infinito* per $x \to x_0$ se $f(x) \to +\infty$ o $-\infty$ per $x \to x_0$.

Se f e g sono entrambe infinitesimi per $x \to x_0$, e g è diversa da zero in un intorno di x_0 (tranne che al più in x_0), consideriamo il limite per $x \to x_0$ di f/g. Esistono quattro possibilità:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{array}{l} \text{a. } 0, \\ \text{b. } L \in \mathbb{R}, L \neq 0, \\ \text{c. } \infty \\ \text{d. non esiste.} \end{array}$$

In corrispondenza dei quattro casi sopra descritti si ha:

a. f è infinitesimo di ordine *superiore* a g (per $x \to x_0$);

b. f e g sono infinitesimi dello stesso ordine;

c. f è infinitesimo di ordine *inferiore* a g (per $x \to x_0$);

d. f e g non sono confrontabili.

Se f e g sono entrambe infiniti per $x \to x_0$, e g è diversa da zero in un intorno di x_0 (tranne che al più in x_0), consideriamo il limite per $x \to x_0$ di f/g. In questo caso, in corrispondenza dei quattro casi di cui sopra, abbiamo invece che *a.* f è infinito di ordine *inferiore* a g (per $x \to x_0$);

b. f e g sono infiniti dello stesso ordine;

c. f è infinito di ordine *superiore* a g (per $x \to x_0$);

d. f e g non sono confrontabili.

Risulta comodo, allo scopo del calcolo dei limiti, confrontare un infinitesimo (o un infinito) per $x \to x_0$ con un infinitesimo o infinito campione, scelto dalla tabella seguente.

x_0	infinitesimo campione	infinito campione
$a \in \mathbb{R}$	$x - a$	$(x-a)^{-1}$
$a = \pm\infty$	x^{-1}	x.

A questo punto, se f è un infinito o un infinitesimo per $x \to x_0$, si definisce *ordine* di $f(x)$ rispetto al corrispondente infinitesimo (o infinito) campione $c(x)$ il numero $\alpha > 0$, se esiste, tale per cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(c(x))^\alpha} = L \in \mathbb{R}, L \neq 0,$$

ossia per cui f e c risultano infinitesimi (o infiniti) dello stesso ordine. La *parte principale* di f per $x \to x_0$ è allora definita come $L(c(x))^\alpha$. Si scrive, alternativamente, che $f \sim_{x_0} L(c(x))^\alpha$, e si legge "$f$ è asintotica a $L(c(x))^\alpha$".

6.3 Esempio. Dai limiti notevoli segue che:

· per $x \to 0$, $\sin x$ e $\log(1+x)$ sono infinitesimi di prim'ordine (rispetto all'infinitesimo campione x), e la loro parte principale è x;

· per $x \to 0$, $1 - \cos(x)$ è un infinitesimo del second'ordine, e la sua parte principale è $x^2/2$;

· dato che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \forall\, \alpha > 0,$$

$\log x$ è infinito di ordine inferiore rispetto ad x^α, per ogni $\alpha > 0$.

Nota. Se, per $x \to x_0$ f_1, f, g_1, g sono infinitesimi, f_1 di ordine *superiore* a f, e g_1 di ordine *superiore* a g, risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f(x)}{g_1(x) + g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)};$$

nel calcolo del limite si possono quindi omettere, a numeratore e denominatore, gli infinitesimi di ordine *superiore*.

6.4 Esempio. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + (\sin\sqrt{x})^5 + \log(1+x^3)}{1 - \cos x + (\tanh x)^3}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin\sqrt{x})^5}{x^{5/2}} = 1$$

(limite notevole), $(\sin\sqrt[2]{x})^5$ è infinitesimo di ordine $5/2$;

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^3)}{x^3} = 1$$

(sempre limite notevole), $\log(1+x^3)$ è infinitesimo di ordine 3, quindi entrambi sono infinitesimi di ordine superiore a x^2, e possono essere trascurati. Per il denominatore, ricordiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

osserviamo poi che

$$\lim x \to 0^+ \frac{(\tanh x)^3}{x^3} = 1$$

(limite fatto in classe), $\log(1+x^3)$ è infinitesimo di ordine 3, e quindi di ordine inferiore a $1-\cos x$, che ha ordine 2. Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + (\sin\sqrt{x})^5 + \log(1+x^3)}{1 - \cos x + (\tanh x)^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2.$$

Nota. Se, per $x \to x_0$ f_1, f, g_1, g sono infiniti, f_1 di ordine *inferiore* a f, e g_1 di ordine *inferiore* a g, risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + f(x)}{g_1(x) + g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)};$$

nel calcolo del limite si possono quindi omettere, a numeratore e denominatore, gli infiniti di ordine *inferiore*.

6.5 Esempio. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(\log x)^{10} + x^2 + 5\sin x}{6x^2 + x\arctan x^2}.$$

A tale limite corrisponde la forma indeterminata ∞/∞. Se osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\log x)^{10}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{10}}{x} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{1/10}}\right)^{10} = 0,$$

(l'ultimo passaggio è un limite notevole), scopriamo che $x(\log x)^{10}$ è infinito di ordine inferiore a x^2, possiamo quindi trascurarlo; $5\sin x$ non è infinito per $x \to +\infty$, e possiamo pertanto trascurarlo senza problemi. Per il denominatore, è chiaro che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\arctan x^2}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x^2}{6x} = 0,$$

per il teorema sul prodotto di una funzione limitata ($\arctan x^2$) per una funzione che tende a 0 ($1/6x$), e quindi $x\arctan x$ è trascurabile rispetto a $6x^2$. Riassumendo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\log x)^{10} + x^2 + 5\sin x}{6x^2 + x\arctan x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{6x^2} = \frac{1}{6}.$$

6.6 Esercizio. Calcolare l'ordine (rispetto a x) dei seguenti infinitesimi per $x \to 0^+$ e scriverne la parte principale:

$$\text{(i)}\ \frac{x\sqrt{x^3+\sin x}}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{(ii)}\ \sqrt{x(x^2+x)}, \qquad \text{(iii)}\ \frac{x\sqrt{\tan x}+\sin x}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{(iv)}\ (\sin(3\sqrt[3]{x})), \qquad \text{(v)}\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1-\cos x) \quad \text{(vi)}\ \frac{x^2}{(\sin x)^{1/3}\sin 2x}$$

6.7 Esercizio. Calcolare l'ordine (rispetto a x) dei seguenti infiniti per $x \to +\infty$:

$$\text{(i)}\ x^2 + x^3, \qquad \text{(ii)}\ \frac{x^4+1}{3x-5}, \qquad \text{(iii)}\ x^2\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\text{(iv)}\ \sqrt{x^2+1}, \quad \text{(v)}\ x^2\arctan x, \quad \text{(vi)}\ x + \sqrt{x^4+x^2}.$$

6.8 Esercizio. Mettere in ordine di rapidità decrescente i seguenti infinitesimi per $x \to +\infty$

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\log\log x}{\log x}, \quad x\mathrm{e}^{-x}, \quad x^{-1/3}.$$

6.9 o-piccoli. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0, con g diversa da zero in tale intorno (tranne al più in x_0). Si dice che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) = o(g(x))$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In particolare, se g è un infinitesimo, ciò equivale a dire che f è un infinitesimo di ordine superiore. Se g è invece un infinito, ciò equivale a dire che f è un infinito di ordine inferiore (o che è limitata in un intorno di x_0). Solitamente, la funzione g è un infinitesimo o un infinito campione.

Utilizzando tale notazione è possibile semplificare il calcolo dei limiti: a tale scopo, si sfruttano le seguenti proprietà di semplice dimostrazione (chi fosse interessato a vederne una, mi contatti: altrimenti, provate per esercizio). Nel seguito, m, n sono numeri reali e C è una costante diversa da zero

1. Se $f(x) = o(x^m)$, allora $Cf(x) = o(x^m)$;
2. Se $x \to 0$, $f(x) = o(x^m)$ e $g(x) = o(x^n)$, allora
$$f(x) + g(x) = o(x^\alpha), \; \alpha = \min\{m, n\};$$
3. Se $x \to \infty$, $f(x) = o(x^m)$ e $g(x) = o(x^n)$, allora
$$f(x) + g(x) = o(x^\alpha), \; \alpha = \max\{m, n\};$$
4. Come caso particolare di 2. e 3. ricaviamo che $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.
5. Se $f(x) = o(x^m)$, allora $(f(x))^n = o(x^{mn})$;
6. Se $f(x) = o(x^m)$, $g(x) = o(x^n)$, allora $f(x)g(x) = o(x^{mn})$;
7. $o(x^m + o(x^m)) = o(x^m)$.

6.10 Esempio. Dimostriamo con la definizione che, per $x \to 0$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

Dato che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2},$$

si ottiene

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x} = 0,$$

cioè

$$\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}=o(x),$$

da cui il risultato.

6.11 Esempio. Usando le regole, dimostriamo che

$$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Ricordiamo preliminarmente (fatto in classe) che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1.$$

Quindi, come nell'esempio precedente, si ricava $\sinh x = x + o(x)$. A questo punto, ricordiamo che $\cosh x = \sqrt{1+(\sinh x)^2}$: utilizzando il risultato dell'esempio precedente,

$$\cosh x = 1+\frac{(\sinh x)^2}{2}+o((\sinh x)^2).$$

Ma dalla regola 5 segue

$$(\sinh x)^2=(x+o(x))^2=x^2+2xo(x)+o(x)^2=x^2+o(x^2),$$

ove nell'ultimo passaggio si usano le regole 1. (per togliere il 2), 6. ($xo(x) = o(x^2)$) e 4. Quindi, sostituendo e utilizzando infine la regola 7.

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2+o(x^2))=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

come desiderato.

6.12 Esercizio. Mostrare la validità dei seguenti sviluppi asintotici per $x \to 0$:

(i) $\tan x = x + o(x)$;

(ii) $e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + o(x^2)$;

(iii) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} - 1 = -x\log x + o(x\log x)$.

(iv) $\log(1+(\sin x)^2) = x^2 + o(x^2)$.

6.13 Esercizio. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\log(1+e^{2-x})-x^{\lambda},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.14 Esercizio. Determinare λ affinché $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} \left(\sqrt{x^2 + \lambda} - x \right)$ valga 2.