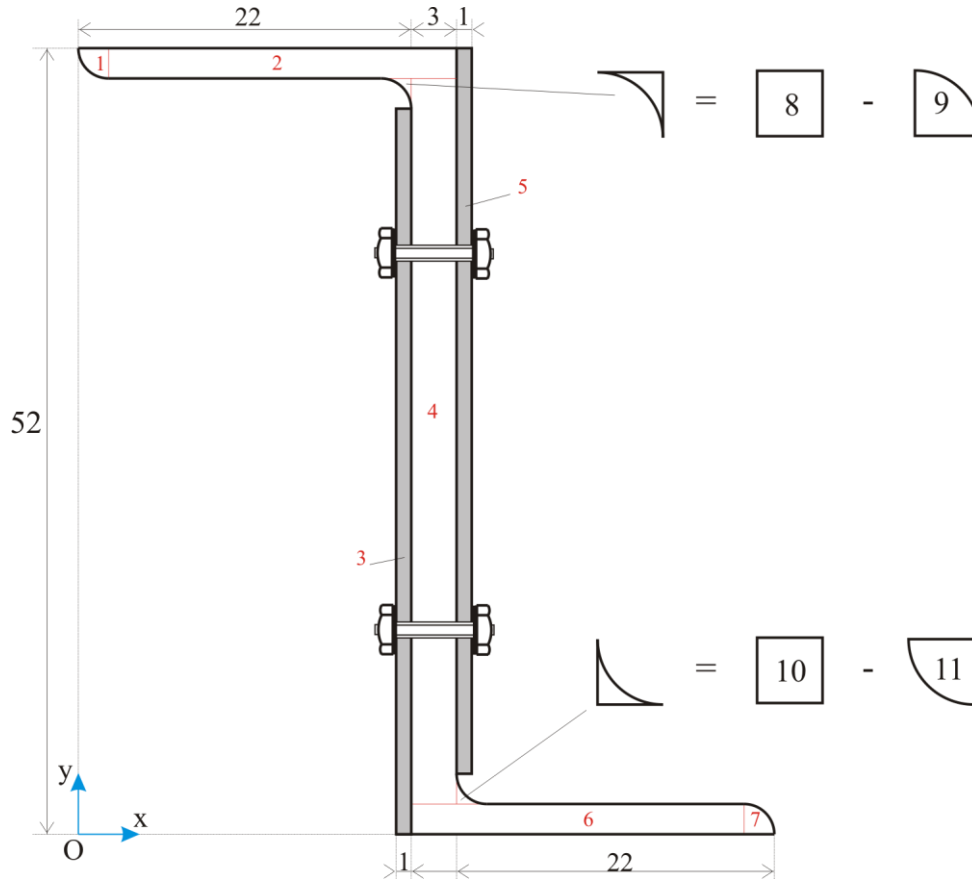


Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

ELABORATO 2 – GEOMETRIA DELLE MASSE



DATI

$\mu_{Al} = 1.00 \text{ Kg/m}^2$	$\mu_{Fe} = 3.28 \text{ Kg/m}^2$	$s = 1 \text{ mm}$	$d = 3 \text{ mm}$
$b = 22 \text{ mm}$	$r = 2 \text{ mm}$	$h = 52 \text{ mm}$	

La struttura è stata divisa in 11 parti ed è formata da due figure elementari: rettangolo e quarto di cerchio (si esclude la bullonatura che è puramente rappresentativa). Le parti in alluminio hanno uno sfondo grigio.

Calcolo del baricentro della struttura

Definizione di baricentro (di un corpo continuo):

$$G - O = \frac{\int_C \mu(P - O) dC}{\int_C \mu dC}$$

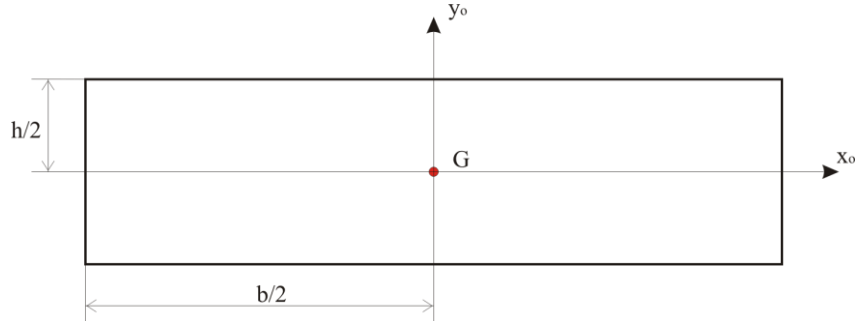
dove

$$m = \int_C \mu dC \quad \mu = \frac{dm}{dC}$$

Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

m è la massa della figura e μ la densità di campo.

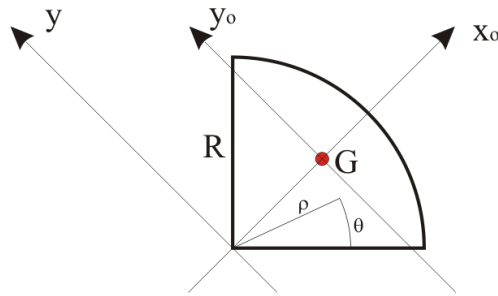
Per il calcolo del baricentro della struttura si sono trovati dapprima i baricentri delle singole figure. Il rettangolo ha due assi di simmetria, dunque il baricentro si troverà nella loro intersezione



cioè a metà della base ed a metà dell'altezza.

Il quarto di cerchio invece possiede un solo asse di simmetria ed il baricentro si può ricavare dalla risoluzione di un integrale doppio in coordinate polari

$$x_G = \int_0^R \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$$



Fatto ciò è agevole calcolare il baricentro di ogni singola figura *nelle coordinate del sistema di riferimento scelto (si veda la prima figura)*. Per i calcoli si veda l'allegato in MATLAB. Si riportano qui i risultati in una tabella.

figura	A_i	m_i (*10 ⁻⁶)	x_{Gi}	y_{Gi}	S_{xi} (*10 ⁻⁶)	S_{yi} (*10 ⁻⁶)
1	$\pi*2^2/4$	10.3	1.1512	51.1512	526.857	11.857
2	$(22+3-2)*2$	150.9	13.5	51	7695.9	2037.15
3	$1*(52-2*2)$	48	21.5	24	1152	1032
4	$3*(52-2*2)$	472.3	23.5	26	12279.8	11099.05
5	$1*(52-2*2)$	48	25.5	28	1344	1224
6	$(22+3-2)*2$	150.9	33.5	1	150.9	5055.15
7	$\pi*2^2/4$	10.3	45.8488	0.8488	8.743	472.243
8	2^2	13.1	21	49	641.9	275.1
9	$\pi*2^2/4$	-10.3	20.8488	48.8488	-503.143	-214.743
10	2^2	13.1	26	3	39.3	340.6
11	$\pi*2^2/4$	-10.3	26.1512	3.1512	-32.457	-269.357
tot. str.	-	896.32	-	-	23303.8	21063.05

Allievo: **Danilo**
Matricola: -

Le coordinate del baricentro della struttura sono state calcolate con l'ausilio del momento statico

$$S_x = \sum_i m_i y_i = \int_C \mu y dC$$

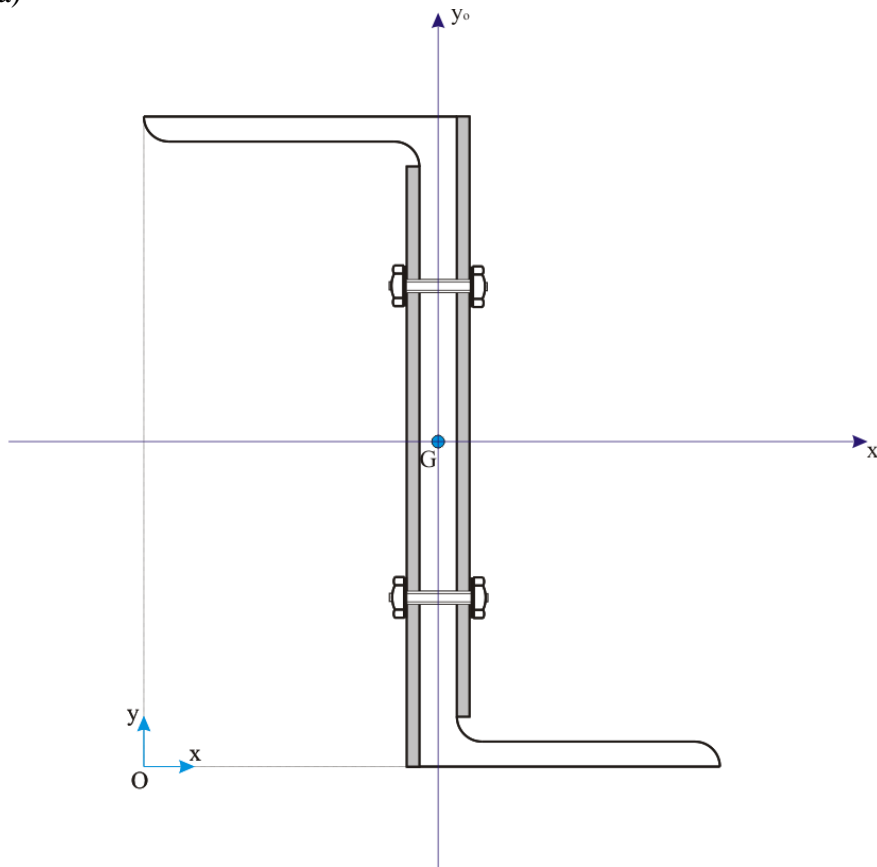
$$S_y = \sum_i m_i x_i = \int_C \mu x dC$$

$$x_G = \frac{S_y}{M} = 23.5$$

$$y_G = \frac{S_x}{M} = 26$$

dove con M si è indicata la massa totale (somma delle masse) del sistema

NOTA: nel calcolo delle grandezze (masse, momenti, etc.) degli 'spicchi' (raccordi) è stata effettuata la differenza tra la figura quadrato e la figura quarto di cerchio (a cui è stata assegnata densità negativa)



Grandezze d'inerzia

Trovato il baricentro si tracciano gli assi baricentrali: rispetto a questi si calcolano i momenti d'inerzia ed il prodotto d'inerzia del profilato.

Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

Definizione di momento d'inerzia e di prodotto d'inerzia

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 = \int_C \mu y^2 dC$$

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2 = \int_C \mu x^2 dC$$

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \int_C \mu xy dC$$

Per effettuare tal operazione si calcolano prima i momenti ed i prodotti d'inerzia delle singole figure, ciascuna rispetto ai propri assi baricentrali, in seguito si applica il **teorema di Huyghens**

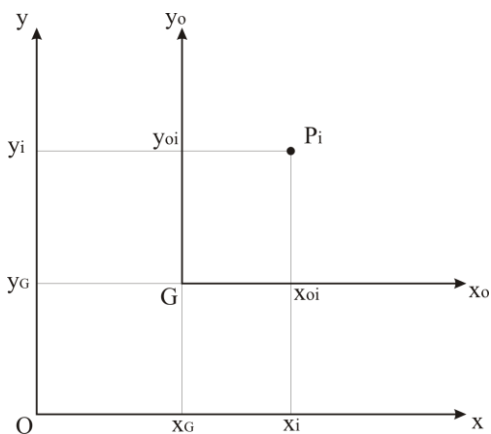
$$I_r = I_{r_o} + m\delta^2$$

$$J_{rs} = J_{r_o s_o} + m\delta_r \delta_s$$

dove con r_o si indicata una retta passante per il baricentro, r una retta parallela ad r_o e δ la distanza che le separa. Nel programma in MATLAB l'applicazione del teorema di Huyghens è stata realizzata con l'ausilio del *ciclo for*. La tabella seguente riassume i risultati di ogni operazione.

fig.	I_{xi}	I_{yi}	J_{xyi}	x_{oi}	y_{oi}	I_{Xoi}	I_{Yoi}	J_{XoYoi}
1	$2.880 \cdot 10^{-6}$	$2.880 \cdot 10^{-6}$	$8.644 \cdot 10^{-7}$	-22.349	25.151	0.007	0.005	-0.006
2	$5.029 \cdot 10^{-5}$	0.007	0	-10	25	0.094	0.022	-0.038
3	$9.216 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0	-2	-2	$9.408 \cdot 10^{-3}$	$1.960 \cdot 10^{-4}$	$1.920 \cdot 10^{-4}$
4	0.091	$3.542 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0.091	$3.542 \cdot 10^{-4}$	0
5	$9.216 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0	2	2	$9.408 \cdot 10^{-3}$	$1.960 \cdot 10^{-4}$	$1.920 \cdot 10^{-4}$
6	$5.029 \cdot 10^{-5}$	0.007	0	10	-25	0.094	0.022	-0.038
7	$2.880 \cdot 10^{-6}$	$2.88 \cdot 10^{-6}$	$8.644 \cdot 10^{-7}$	22.349	-25.151	0.007	0.005	-0.006
8	$4.373 \cdot 10^{-6}$	$4.373 \cdot 10^{-6}$	0	-2.5	23	0.007	$8.637 \cdot 10^{-5}$	$-7.544 \cdot 10^{-4}$
9	$-2.880 \cdot 10^{-6}$	$-2.880 \cdot 10^{-6}$	$-8.644 \cdot 10^{-7}$	-2.651	22.849	-0.005	$-7.531 \cdot 10^{-5}$	$6.233 \cdot 10^{-4}$
10	$4.373 \cdot 10^{-6}$	$4.373 \cdot 10^{-6}$	0	2.5	-23	0.007	$8.637 \cdot 10^{-5}$	$-7.544 \cdot 10^{-4}$
11	$-2.880 \cdot 10^{-6}$	$-2.880 \cdot 10^{-6}$	$-8.644 \cdot 10^{-7}$	2.6512	-22.849	-0.005	$-7.531 \cdot 10^{-5}$	$6.233 \cdot 10^{-4}$
tot.	-	-	-	-	-	0.314	0.055	-0.087

dove con I_x , I_y e J_{xy} si intendono le grandezze d'inerzia della figura *i-ima* rispetto agli assi baricentrali della figura medesima, con x_{oi} e y_{oi} rispettivamente le distanze dei baricentri delle singole figure dagli assi y_o e x_o ; si tenga conto del seguente isomorfismo, con il quale si passa in coordinate baricentriche



$$x_{oi} = x_i - x_G$$

$$y_{oi} = y_i - y_G$$

Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

Con I_{X_o} , I_{Y_o} e $J_{X_oY_o}$ si intendono le grandezze d'inerzia rispetto agli assi baricentrali dell'intera struttura calcolati con il teorema di Huyghens (nel MATLAB indicate con I_{xG} , I_{yG} e J_{xGyG}).

$$I_{x_o} = 0.314 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{y_o} = 0.055 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$J_{x_o y_o} = -0.087 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2$$

Con l'ausilio del **teorema delle rotazioni** si individuano le **direzioni centrali d'inerzia**, che sono assi baricentrali rispetto a cui i momenti d'inerzia sono minimo e massimo (ed il prodotto d'inerzia è nullo):

$$I_{\xi_o} = I_{x_o} \cos^2 \varphi^* + I_{y_o} \sin^2 \varphi^* - J_{x_o y_o} \sin 2\varphi^*$$

$$I_{\eta_o} = I_{x_o} \sin^2 \varphi^* + I_{y_o} \cos^2 \varphi^* + J_{x_o y_o} \sin 2\varphi^*$$

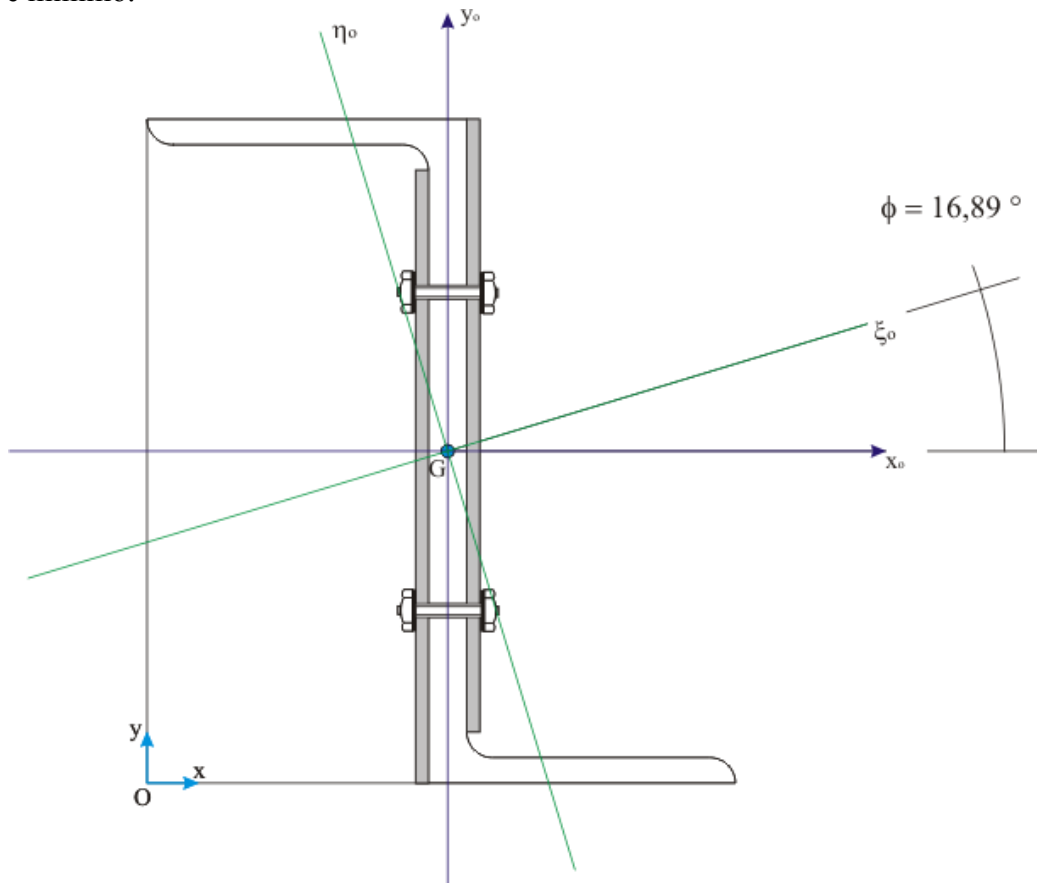
$$\varphi^* = \frac{1}{2} \arctan \frac{2J_{x_o y_o}}{I_{y_o} - I_{x_o}} = 16.89^\circ$$

φ^* è l'angolo, rispetto all'asse x , che individua le direzioni centrali d'inerzia.

$$I_{\xi_o} = 0.341 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{\eta_o} = 0.028 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2$$

ξ_o è la direzione rispetto a cui il momento d'inerzia è massimo, η_o quella rispetto a cui il momento d'inerzia è minimo.

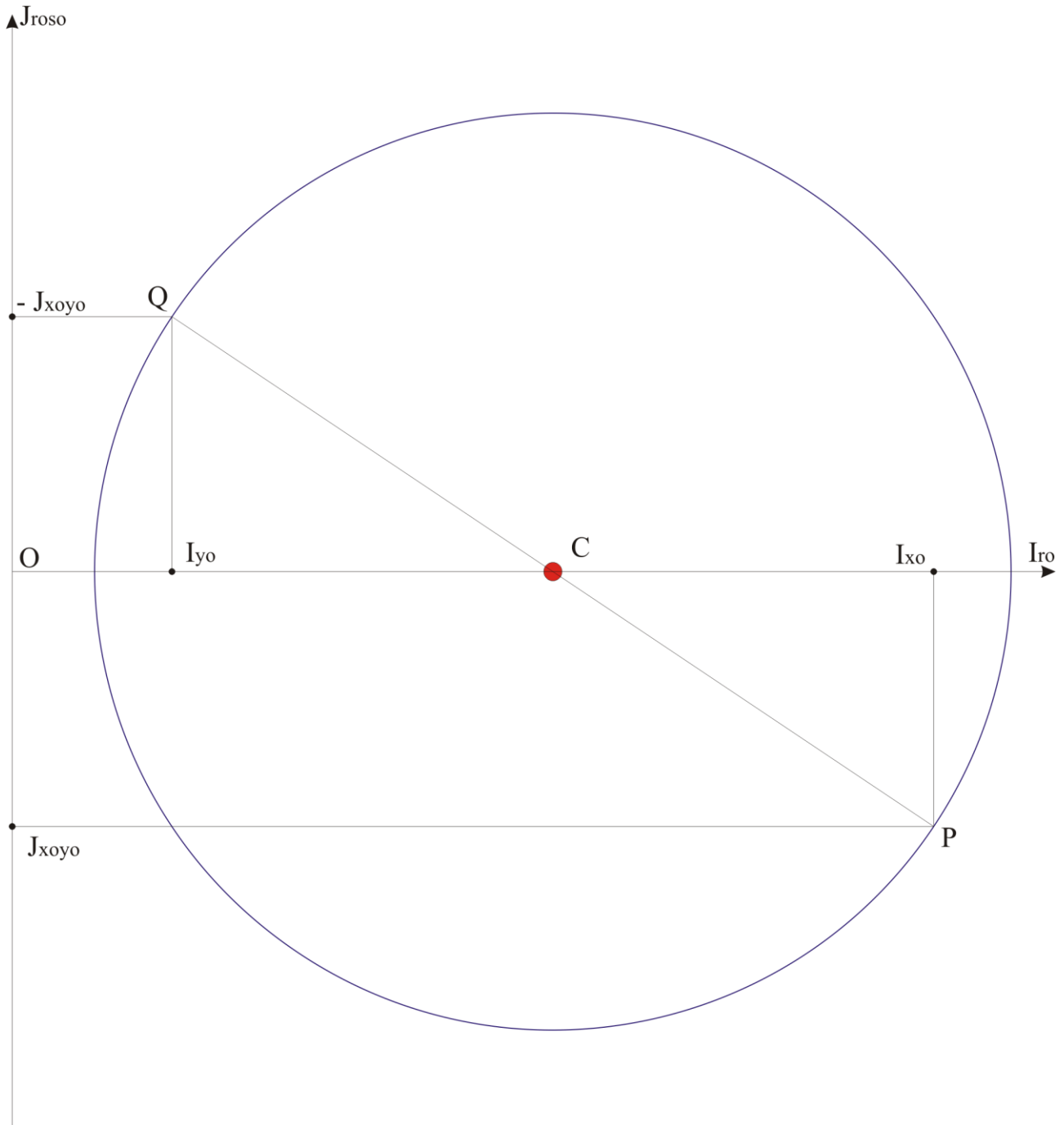


Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

Attraverso il **cerchio di Mohr** (realizzato con la suite grafica CorelDraw 12) si determinano graficamente i valori dei momenti d'inerzia min e max e le direzioni centrali d'inerzia.

La scala adottata è $1\text{ cm} = 20 * 10^{-3} \text{ Kg mm}^2$

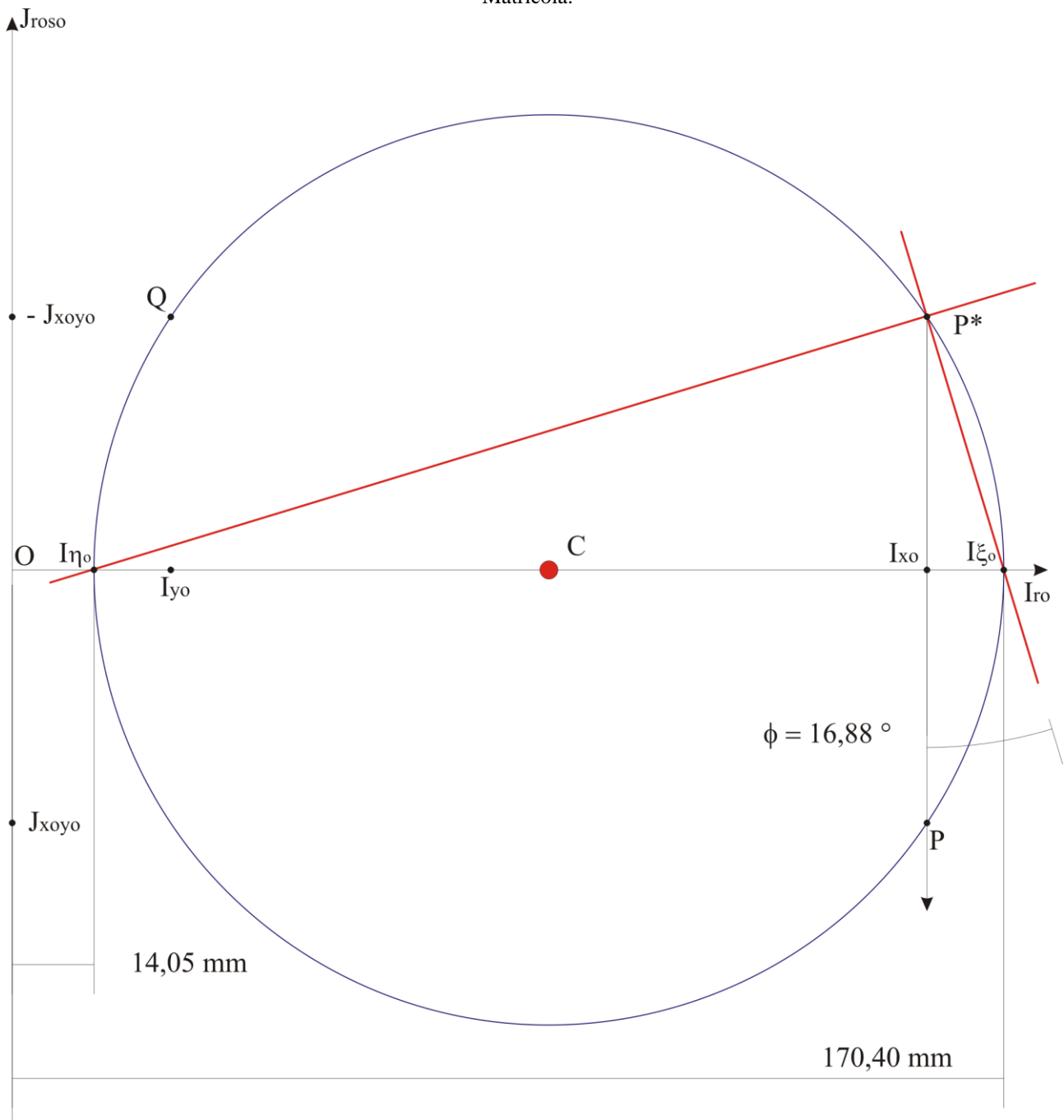
NOTA: $1\text{ mm} = 2 * 10^{-3} \text{ Kg mm}^2$



punti notevoli del cerchio di Mohr

$$\begin{aligned}
 P &= [I_{xo} & ; & J_{xoyo}] & \text{(polo)} \\
 Q &= [I_{yo} & ; & -J_{xoyo}] \\
 C &= [(I_{xo} + I_{yo})/2 & ; & 0] & \text{(centro)}
 \end{aligned}$$

Allievo: **Danilo**
 Matricola: -



dall'esame del cerchio di Mohr si verifica che

$$I_{\xi} = 170,40 * 2 * 10^{-3} = 0,3408 \text{ Kg mm}^2$$

$$I_{\eta} = 14,05 * 2 * 10^{-3} = 0,0281 \text{ Kg mm}^2$$

Ellisse di Culmann

E' un'ellisse il cui centro coincide con il baricentro G del sistema e i cui assi coincidono con gli assi centrali d'inerzia, di equazione

$$\frac{\xi_o^2}{\rho_{\eta_o}^2} + \frac{\eta_o^2}{\rho_{\xi_o}^2} = 1$$

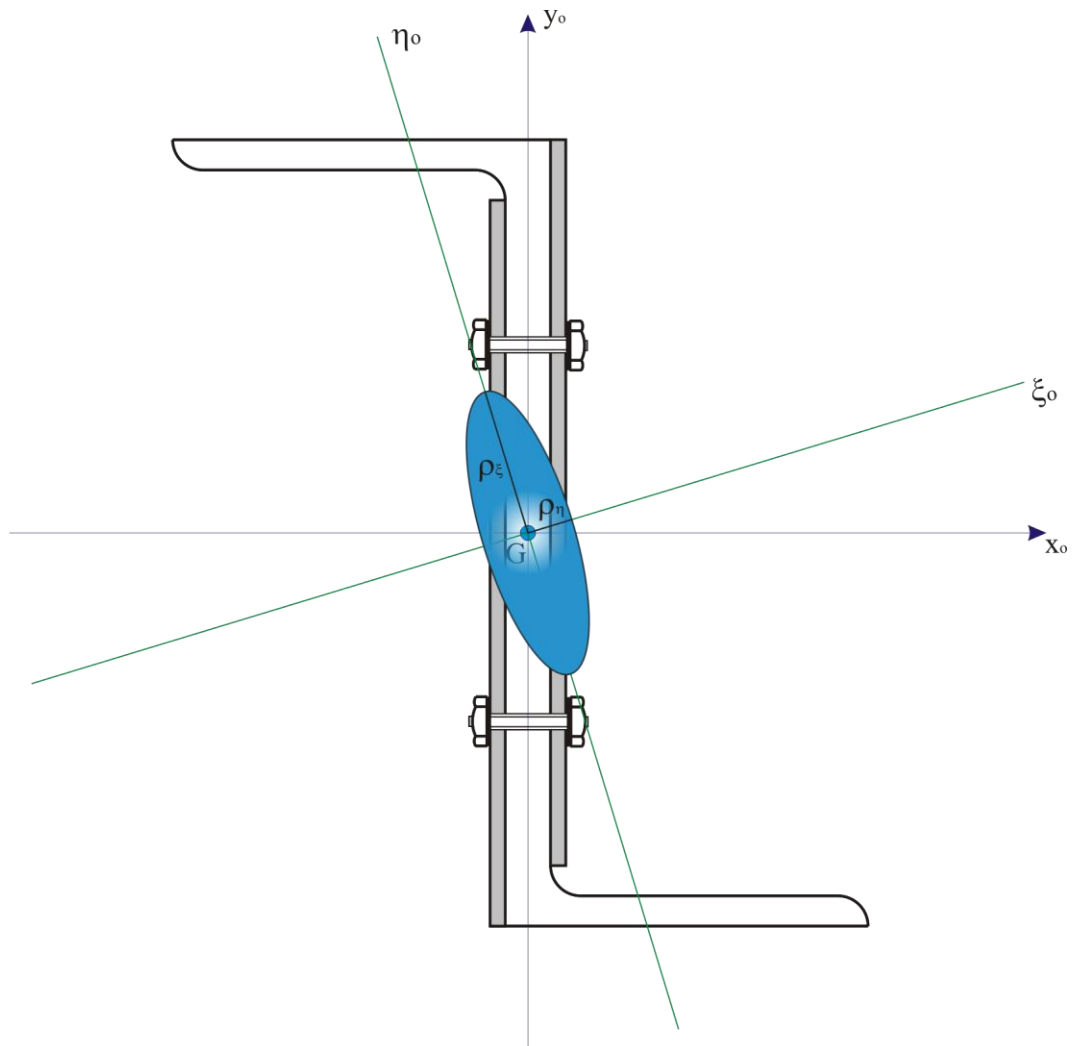
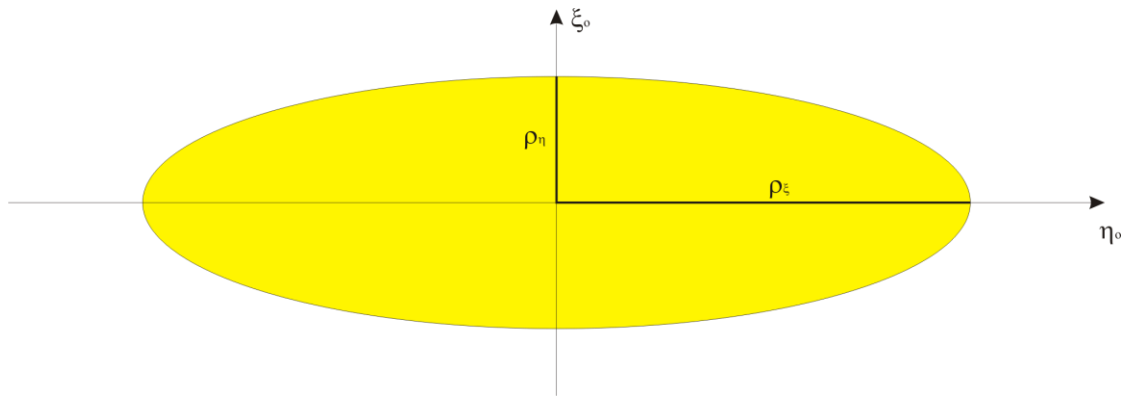
definizione di **raggio d'inerzia**

Allievo: **Danilo**
Matricola: -

$$\rho_r = \sqrt{\frac{I_r}{M}}$$

$$\rho_{\xi_o} = 19.498mm$$

$$\rho_{\eta_o} = 5.605mm$$

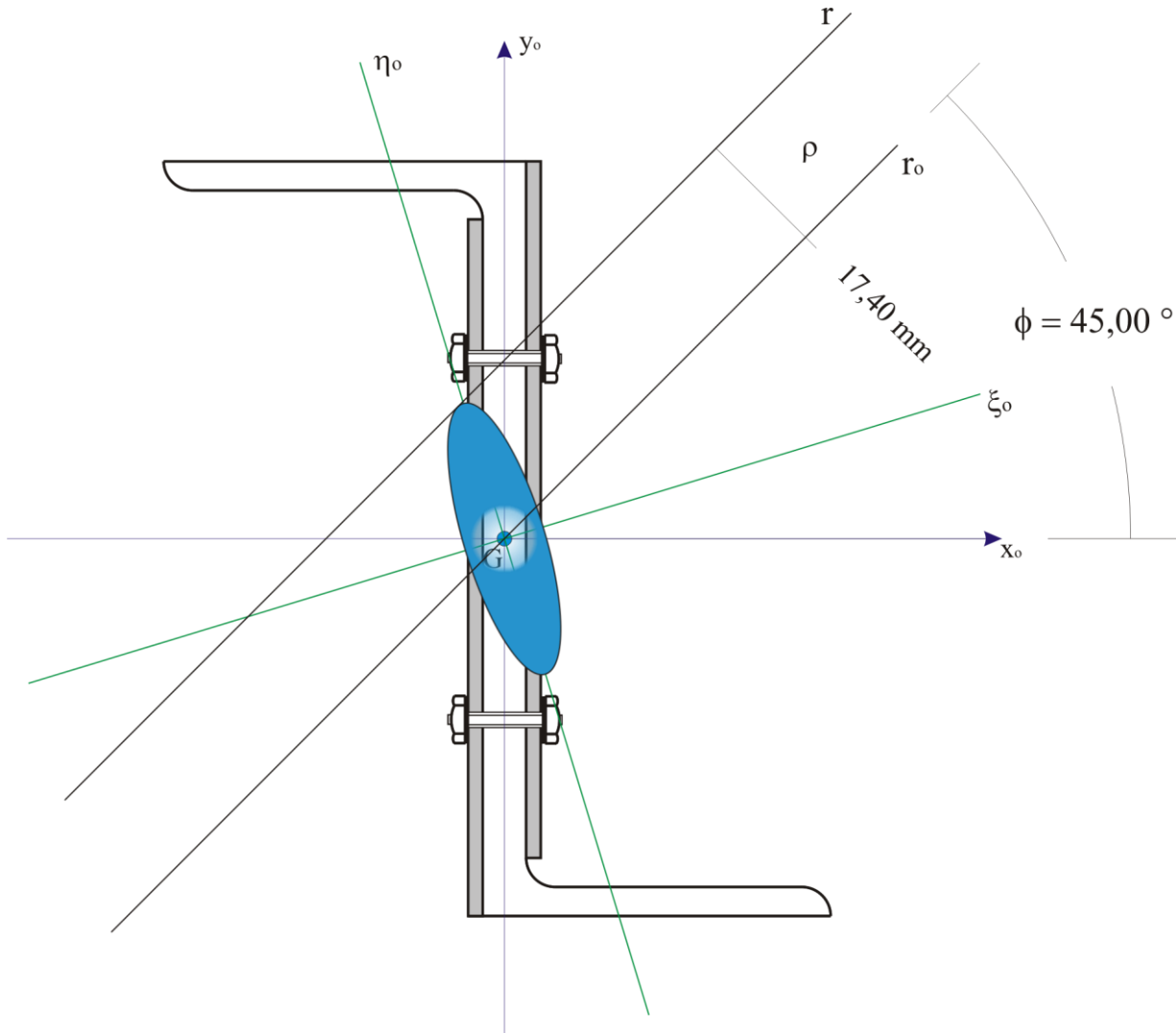


Allievo: **Danilo**

Matricola: -

Attraverso l'ellisse di Culmann calcoliamo il momento d'inerzia della struttura rispetto ad una retta r_o inclinata di 45° rispetto all'asse x .

E' stata sfruttata una proprietà dell'ellisse secondo la quale la distanza fra la retta baricentrica e quella parallela tangente all'ellisse è proprio il raggio d'inerzia ρ cercato: il raggio d'inerzia cercato è $\rho = 17.4 \text{ mm}$ ed il momento d'inerzia $I_{r_o} = 8.9632 * 10^{-4} * 17.4^2 = 0.271 \text{ Kg mm}^2$



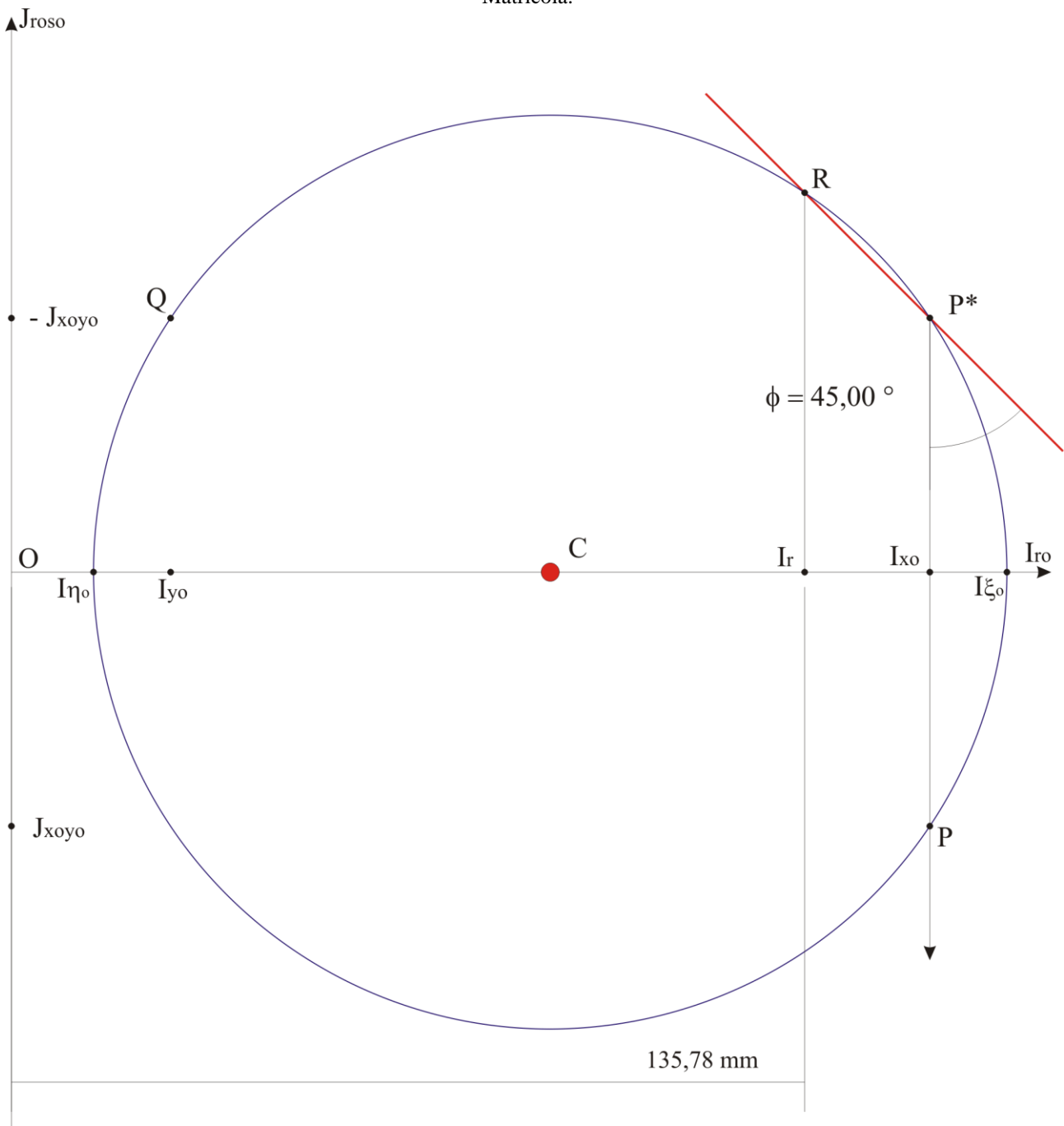
Applicando il teorema delle rotazioni si calcola analiticamente

$$I_{r_o} = I_{x_o} \cos^2 45^\circ + I_{y_o} \sin^2 45^\circ - J_{x_o y_o} \sin 90^\circ = 0.27136 \text{ Kg} \cdot \text{mm}^2$$

Si è poi confrontata questa situazione anche con il cerchio di Mohr dove si è ricavato

$$I_{r_o} = 135.78 * 2 * 10^{-3} = 0.27156 \text{ Kg mm}^2$$

Allievo: **Danilo**
Matricola: -



Allievo: **Danilo**
 Matricola: -

Un altro metodo per il calcolo del momento d'inerzia rispetto ad una retta r di versore e l'utilizzo del **tensore d'inerzia** (relativo a G), che per definizione

$$\underline{\underline{Y_G}} = \begin{pmatrix} I_{xo} & -J_{xoyo} & -J_{xozo} \\ -J_{yoxo} & I_{yo} & -J_{yozo} \\ -J_{zoxo} & -J_{zoyo} & I_{zo} \end{pmatrix}$$

ma nel nostro caso, dato che il sistema è piano (si ricordi comunque che $I_{zo} = I_{xo} + I_{yo}$)

$$\underline{\underline{Y_G}} = \begin{pmatrix} I_{xo} & -J_{xoyo} & 0 \\ -J_{yoxo} & I_{yo} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zo} \end{pmatrix}$$

applicando il tensore d'inerzia alla retta r_o dapprima attraverso un prodotto matriciale e poi un prodotto scalare si ha:

(i coseni direttori del versore e)

$$e = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Y_G}} e \cdot e &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.31437 & 0.08690 & 0 \\ 0.08690 & 0.05455 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36892 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.31437/\sqrt{2} + 0.08690/\sqrt{2} \\ 0.08690/\sqrt{2} + 0.05455/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (0.40127/2 + 0.14145/2) = 0.27136 \text{Kg} \cdot \text{mm}^2 \end{aligned}$$

che è, ovviamente, lo stesso calcolato con il teorema delle rotazioni (si confronti sempre con il programma in MATLAB)

Allievo: **Danilo**
Matricola: -

Infine se la struttura dovesse sopportare un momento flettente \mathcal{M} sull'asse baricentrale parallelo all'asse y , occorre posizionarla in modo che essa offra la massima resistenza a tale flessione e cioè con l'asse ξ coincidente con la direzione del vettore momento flettente \mathcal{M} . In tal caso l'angolo ϕ_0 che la figura deve formare con l'asse delle x è pari a $90^\circ - \varphi^* = 73.11^\circ$

