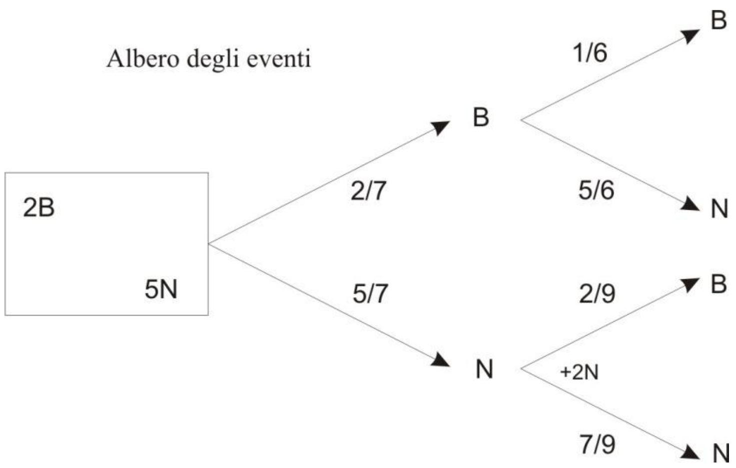
ESERCIZI DI PROBABILITA'

Esercizio 1

Un'urna contiene 2 biglie bianche e 5 nere. Estraiamo una prima biglia: se è nera la rimettiamo dentro con altre due dello stesso colore, se è bianca non rimettiamo niente. Estraendo la seconda biglia, qual è la probabilità che sia nera?

Il problema può risolversi in diversi modi; un modo intuitivo consiste nel considerare il così detto "albero degli eventi":



Per cui, seguendo i rami dell'albero di nostro interesse, si ha:

$$Pr\{seconda\ biglia\ nera\} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{9} \times \frac{5}{7} = 0.79$$

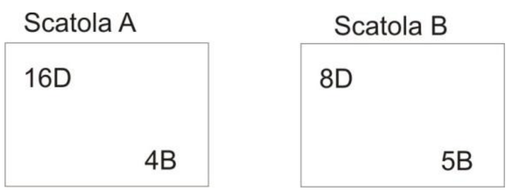
Alternativamente può usarsi la regola di Bayes:

$$Pr\{seconda\ biglia\ nera\} = Pr\{N_2\} = Pr\{N_2|N_1\} \cdot Pr\{N_1\} + Pr\{N_2|B_1\} \cdot Pr\{B_1\} =$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{9} \times \frac{5}{7} = 0.79$$

Esercizio 2

In una scatola A vi sono 16 pezzi difettosi e 4 buoni, in una scatola B vi sono 5 buoni e 8 difettosi. Supponiamo di lanciare un dado. Se esce 1 o 2 prendo un pezzo da A; se non escono 1 o 2 (cioè escono 3 o 4 o 5 o 6) prendo un pezzo da B. Qual è la probabilità di estrarre un pezzo difettoso?



Anche questo esercizio si risolve immediatamente applicando la regola di Bayes:

$$Pr\{D\} = Pr\{D|scatola\ A\} \cdot Pr\{scatola\ A\} + Pr\{D|scatola\ B\} \cdot Pr\{scatola\ B\} =$$

$$= \frac{16}{20} \times \frac{2}{6} + \frac{8}{13} \times \frac{4}{6} = 0.68$$

Esercizio 3

Determinare la probabilità di un evento se *a* è il suo verificarsi e *b* il suo non verificarsi.

"Giocando" con le relazioni si può scrivere:

$p = a$ probabilità dell'evento

$1-p = b$ complementare dell'evento

$a + b = 1$ spazio campione (insieme di tutte le alternative possibili)

$$\frac{p}{1-p} = \frac{a}{b}$$

$$pb = a(1-p)$$

$$p = \frac{a}{a+b}$$

ovvero: casi favorevoli su casi possibili, il concetto più intuitivo ed immediato di "probabilità"!

Esercizio 4

Su 10 ragazze 3 hanno gli occhi blu; ne vengono scelte a caso 2. Determinare:

a) la probabilità che entrambe hanno gli occhi blu;
b) la probabilità che nessuna ha gli occhi blu;
c) la probabilità che almeno una ha gli occhi blu.

Per ognuno di questi casi si potrebbe applicare il modello ipergeometrico: è come se si volesse determinare la probabilità che vengano estratti *k* "oggetti difettosi" su un campione di *n* "oggetti estratti casualmente da un lotto di *N* > *n*", dato che "nel lotto sono presenti *D* oggetti difettosi".

$$P_K(K) = \frac{\binom{D}{K}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

a) $Pr\{entrambe\ hanno\ occhi\ blu\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{10-3}{2-2}}{\binom{10}{2}} = 0.067$

b) $Pr\{nessuna\ ha\ occhi\ blu\} = \frac{\binom{3}{0}\binom{10-3}{2-0}}{\binom{10}{2}} = 0.467$

c) $Pr\{almeno\ una\ ha\ occhi\ blu\} = 1 - Pr\{nessuna\ ha\ occhi\ blu\} = 1 - 0.467 = 0.533$

Esercizio 5

Determinare la probabilità che un numero di 4 cifre, in base 10, abbia almeno 2 cifre uguali.

Il problema sembra di difficile risoluzione, ma si consideri che:

$$Pr\{almeno\ 2\ cifre\ uguali\} = 1 - Pr\{tutte\ cifre\ diverse\}$$

il problema quindi si riduce al determinazione della probabilità che tutte le cifre siano diverse, per cui tenendo presente che il numero è in base 10 si ha:

$$Pr\{tutte\ cifre\ diverse\} = 1 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} = 0.504$$

infatti la prima cifra è uguale a se stessa (ovviamente!), la seconda può assumere 9 valori diversi tranne quello della prima cifra, la terza ha solo 8 possibilità su 10 in quanto deve essere diversa sia dalla prima sia dalla seconda, e così via; in pratica le estrazioni sono s-indipendenti, ma i casi favorevoli diminuiscono di volta in volta, mentre i casi possibili sono sempre 10. Quindi la probabilità cercata è:

$$Pr\{almeno\ 2\ cifre\ uguali\} = 1 - 0.504 = 0.496$$

Esercizio 6

La probabilità che 3 uomini (A, B, C) colpiscano un bersaglio è:

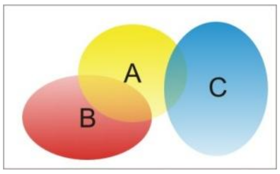
$$\begin{cases} Pr\{A\} = {}^1/_6 \\ Pr\{B\} = {}^1/_4 \\ Pr\{C\} = {}^1/_3 \end{cases}$$

Determinare la probabilità che uno solo colpisca il bersaglio; si determini poi la probabilità che uno solo colpisca il bersaglio e che questi sia A.

La probabilità che uno solo colpisca il bersaglio è l'unione dei tre eventi; tuttavia la probabilità non si riduce ad una somma dei singoli eventi, poiché questi non sono incompatibili (tanto è vero che la loro somma non restituisce 1, cioè lo spazio campione). Allora si può considerare l'unione dei tre singoli eventi A, B, C come l'unione delle intersezioni

$$Pr\{A \cup B \cup C\} = Pr\{(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)\}$$

Il diagramma seguente sopirà tutti i dubbi



In pratica al posto dei singoli eventi si sono prese le loro intersezioni con i complementari degli altri eventi: in questo modo si ottiene l'unione di 3 eventi incompatibili, quindi le rispettive probabilità sono ora sommabili; inoltre gli eventi A, B e C possono considerarsi s-indipendenti, per cui:

$$p = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} = 0.43$$

Ora la probabilità che il tiratore vincente sia proprio A è la probabilità condizionata:

$$Pr\{A|uno\ solo\ colpisce\ il\ bersaglio\} = \frac{Pr\{A \cap uno\ solo\ colpisce\ il\ bersaglio\}}{Pr\{uno\ solo\ colpisce\ il\ bersaglio\}} =$$

$$= \frac{Pr\{A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\}}{p} = \frac{\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{0.43} = 0.19$$

Esercizio 7

Un certo tipo di missile ha la probabilità 0.30 di colpire il bersaglio. Quanti missili si devono lanciare affinché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia almeno dell' 80% ?

La probabilità di colpire ALMENO una volta è 1 – la probabilità di NON colpire MAI.

La probabilità di non colpire mai il bersaglio è $(1 - 0.30)^n$ dove *n* è il numero di missili lanciati; cioè ogni lancio ha il 70% di possibilità di fallimento e tutto questo accade per *n* lanci (da determinare).

$$Pr\{colpire\ almeno\ una\ volta\} = 1 - (1 - 0.30)^n \geq 0.80$$

$$(0.70)^n \leq 0.20$$

$$n \leq \frac{\log 0.7}{\log 0.2} = 4.5$$

per cui bastano 4 missili.

Esercizio 8

Uno studio medico sulla tubercolosi (TBC) effettuato su una certa popolazione di individui ha dato i seguenti risultati (che costituiscono i dati del nostro problema):

$$\begin{cases} Pr\{TBC\} = 0.001 \\ Pr\{test\ positivo|TBC\} = 0.999 \\ Pr\{test\ positivo|\overline{TBC}\} = 0.002 \end{cases}$$

Determinare la probabilità che un certo individuo abbia la tubercolosi, dato che risulta positivo al test.

Osservazioni:

- il primo dato afferma che soltanto lo 0.1% della popolazione è soggetto alla TBC;
- la probabilità che il test sia NEGATIVO, dato che l'individuo in esame abbia la TBC, costituisce il MANCATO ALLARME; tale evento è il complementare del secondo dato;
- il terzo dato costituisce il così detto FALSO ALLARME, cioè la probabilità che un individuo SANO risulti positivo al test della TBC.

Il problema è di immediata risoluzione grazie all'applicazione del TEOREMA di Bayes:

$$Pr\{TBC|test\ positivo\} = \frac{Pr\{TBC \cap test\ positivo\}}{Pr\{test\ positivo\}} =$$

$$= \frac{Pr\{test\ positivo|TBC\} \cdot Pr\{TBC\}}{Pr\{test\ positivo|TBC\} \cdot Pr\{TBC\} + Pr\{test\ positivo|\overline{TBC}\} \cdot Pr\{\overline{TBC}\}} =$$

in pratica al numeratore si è applicata la regola della probabilità composta, al denominatore la REGOLA di Bayes;

$$= \frac{0.999 \times 0.001}{0.999 \times 0.001 + 0.002 \times (1 - 0.001)} = 0.33$$

Quindi, nonostante il test abbia una probabilità di falso allarme pari allo 0.2% e restituisca un mancato allarme solo nello 0.1% dei casi, la probabilità di avere la tubercolosi, dato che il test è positivo, è "solo" del 33%, un numero non elevato.