

## CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA

### Premessa

Questo lavoro presuppone una conoscenza di base dell'argomento e non pretende di essere esauriente.

### La retta di altezza

La retta di altezza è il luogo geometrico dei punti che nel medesimo istante vedono un astro con la stessa altezza.

In realtà, volendo essere rigorosi, parlare di retta di altezza non è propriamente corretto; sarebbe infatti più opportuno parlare di circonferenza di altezza. Il raggio di questa circonferenza è determinato dall'altezza dell'astro osservato e poiché tale valore è in genere molto elevato, ecco che risulta possibile l'approssimazione introdotta inizialmente.

Gli "ingredienti" indispensabili per effettuare una misura di questo tipo sono essenzialmente tre:

- 1- Altezza vera: questa misura viene effettuata immaginando l'osservatore posto al centro della Terra, prendendo come riferimento l'orizzonte astronomico. La misura viene materialmente presa materialmente con il Sestante.
- 2- Stop cronometrico: in questo modo è possibile fissare l'istante di tempo e quindi la posizione dell'astro sulla Terra.
- 3- Punto stimato: permette di fissare la posizione della nave e di conseguenza la "porzione" di retta di altezza da considerare.

Vale la pena ribadire alcuni concetti: innanzitutto l'area individuata dalla circonferenza di altezza, è bene saperlo, è estremamente grande; per intenderci, può raggiungere le dimensioni dell'Italia, pertanto il punto stimato discrimina in questo senso; su questo aspetto torneremo in seguito con un esempio numerico.

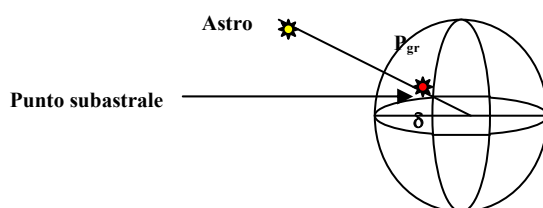
Similmente, lo Stop cronometrico non fa altro che fissare la posizione dell'astro all'istante della misura, nel senso che la declinazione definisce la "latitudine dell'astro" sulla Terra, quindi:

$$\delta = \varphi^*$$

Il Tempo riferito a Greenwich, mi fornisce l'angolo al Polo dell'astro riferito a Greenwich che esprime a sua volta la "longitudine dell'astro" sulla Terra, perciò:

$$T \rightarrow P_{gr} = \lambda^*$$

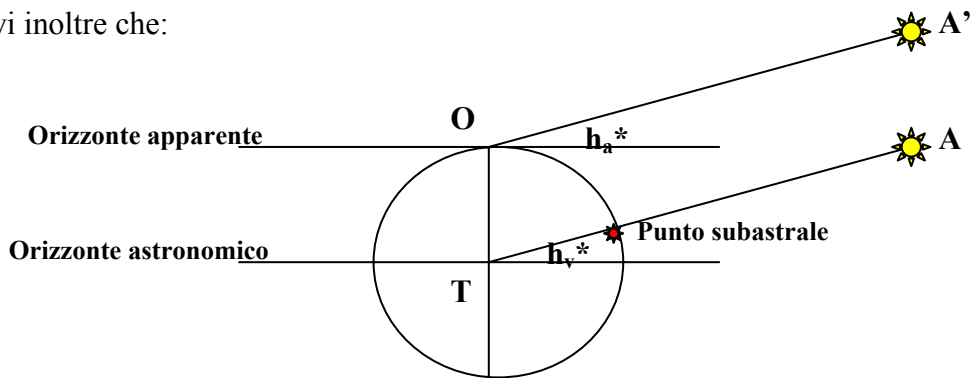
In conclusione  $\varphi^*$  e  $\lambda^*$  definiscono latitudine e longitudine dell'astro sulla superficie della Terra, che prende il nome di punto subastrale.



**CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA**

Poiché gli astri si muovono molto rapidamente, il calcolo del tempo (stop cronometrico) è importante allo scopo di definire con precisione la posizione del punto subastrale.

Si osservi inoltre che:



La congiungente OSSERVATORE – ASTRO è parallela (per questione di distanze astronomiche) alla congiungente CENTRO della TERRA – ASTRO.

L'angolo compreso tra orizzonte apparente e la retta OA' prende il nome di altezza apparente dell'astro, mentre l'angolo compreso tra l'orizzonte astronomico e la retta TA è l'altezza vera. Poiché risulta che OA' // TA, si ha che:

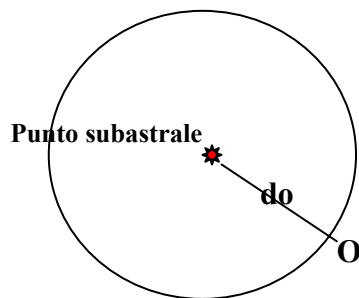
$$h_a^* = h_v^*$$

Siccome l'osservatore è in O e non al centro della Terra, si ha che la misura dell'altezza apparente coincide con la misura dell'altezza vera.

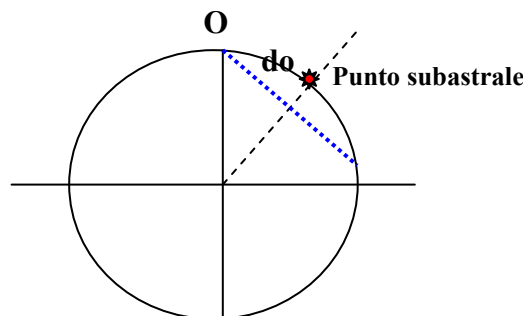
Dalle definizioni delle coordinate astronomiche essendo che:

$$z_{TV} = 90^\circ - h_v$$

si ha cioè che essendo  $z_{TV} = d_o$ , si può concludere che misurare l'altezza dell'astro equivale a determinare la distanza ortodromica dell'osservatore dal punto subastrale cioè:



Per chiarire, il disegno precedente può essere visto anche nel seguente modo:



E' infine possibile valutare numericamente le dimensioni della circonferenza di altezza. Sapendo che:

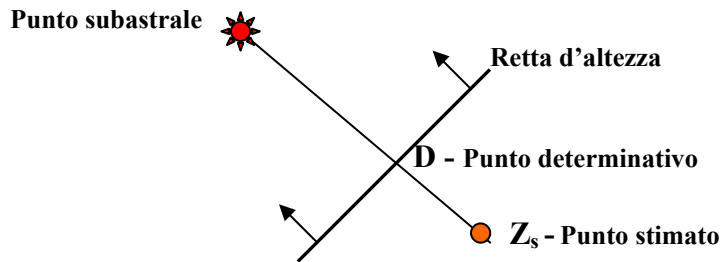
$$1 \text{ mg} = 1852 \text{ m}$$

**CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA**

ecco che se  $h_v = 60^\circ$  ne segue che  $z_{\gamma v} = 30^\circ = 1800' = 1800 \text{ mg} = 3.333.600 \text{ m} = 3.333 \text{ km} !!!$

Questo breve calcolo giustifica in modo semplice la ragione per cui si vada a considerare la retta di altezza in luogo della circonferenza.

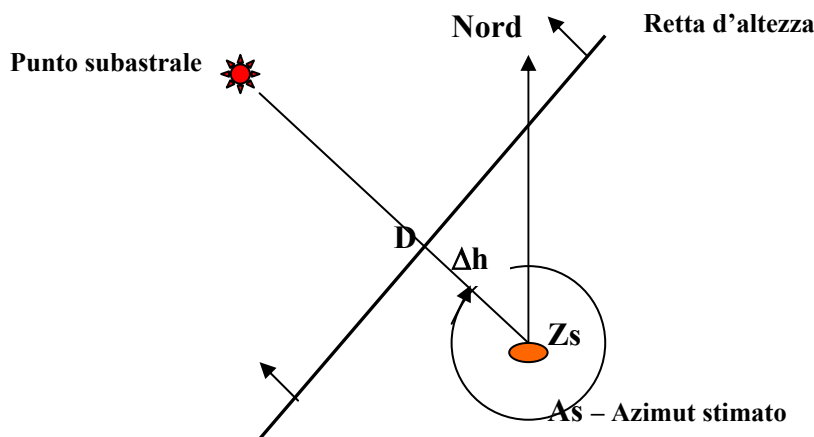
Se a questo punto congiungo il punto stimato ( $Z_s$ ) con il punto subastrale, il risultato è che intersecherò la retta di altezza in un punto D, detto punto determinativo in quanto “determina” la retta. Dovrebbe essere evidente a questo punto che la retta di altezza sarà ortogonale alla retta  $Z_sA$  nel punto D:



Infatti a questo punto l'osservatore solitamente dispone dell'azimut stimato  $a_s$  (calcolato per es. con la:  $\cos Z = [(\text{sen} \delta - \text{sen} \phi \text{sen} h) / \cos \phi \text{sen} h] \rightarrow Z \rightarrow a_s$ , che altri non è che il “rilevamento” del punto subastrale e del  $\Delta h$  che gli dice quanto deve “camminare”, nella direzione definita dall'azimut, per arrivare alla retta di altezza (cioè a D). Infatti:

$$Z_s D = Z_s A - DA = z_{\gamma s} - z_{\gamma v} = (90^\circ - h_s) - (90^\circ - h_v) = 90^\circ - h_s - 90^\circ + h_v = h_v - h_s = \Delta h$$

Si osservi che con questo calcolo si svela la ragione per cui sia indispensabile determinare l'altezza stimata (per es. con la  $\text{sen} h = \text{sen} \phi \text{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos P$ ).



Appare evidente che a partire da due osservazioni di questo tipo e quindi disponendo di due rette di altezza, è possibile ricavare un punto nave (N), per quanto affetto dagli inevitabili errori accidentali e sistematici.

Va osservato però che entrambe queste fonti di errore sono stimabili, per quanto solamente gli errori sistematici sono eliminabili in modo certo attraverso l'uso della bisettrice.

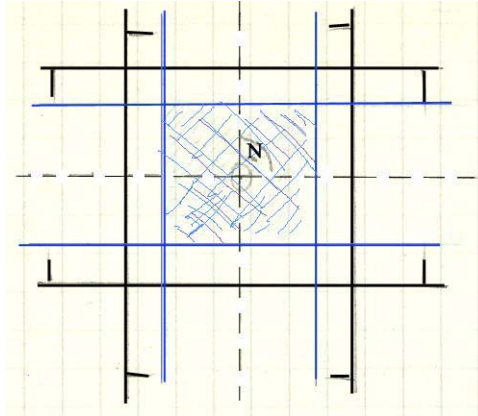
In particolare risulta:

## CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA

$$\varepsilon_s = (d_1 + d_2)/2$$

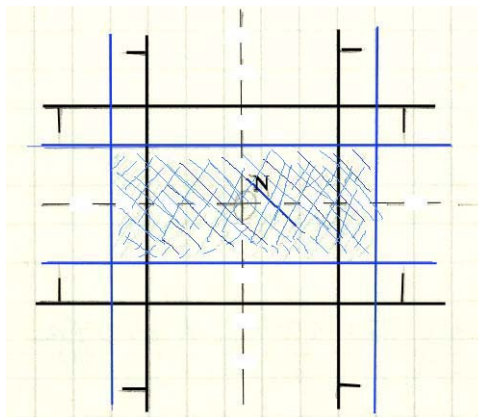
$$\varepsilon_a = \pm |d_1 - d_2|$$

dove di ( $i = 1, 2$ ), rappresenta la distanza tra punto nave e retta di altezza. Essa sarà contata positivamente allorché per andare dal punto nave alla retta di altezza (in direzione ortogonale alla stessa) ci si muove verso l'astro, negativamente quando ci si allontana da essa.



In particolare il punto nave ottenuto è definito OTTIMO se, introducendo un  $\varepsilon_s$ , ottengo una figura simile a quella di partenza, come in figura.

E' invece definito BUONO se, invece, introducendo un  $\varepsilon_s$  la figura che si ottiene risulta esaltata in una delle direzioni, come in figura.



In generale se  $\varepsilon_s > \varepsilon_a$  il punto è ottimo; se invece  $\varepsilon_s < \varepsilon_a$  il punto è buono.

### Errore sulla bisettrice

Concludiamo con la determinazione dell'errore sulla bisettrice. Supponiamo che gli errori sulle due rette di altezza, comprensivi di errore sistematico ed accidentale corrispondano a:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + \varepsilon_{a1}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_s + \varepsilon_{a2}$$

dal triangolo RN'K si ricava facilmente che:

$$e = RN' \sin(90^\circ - \Delta a/2)$$

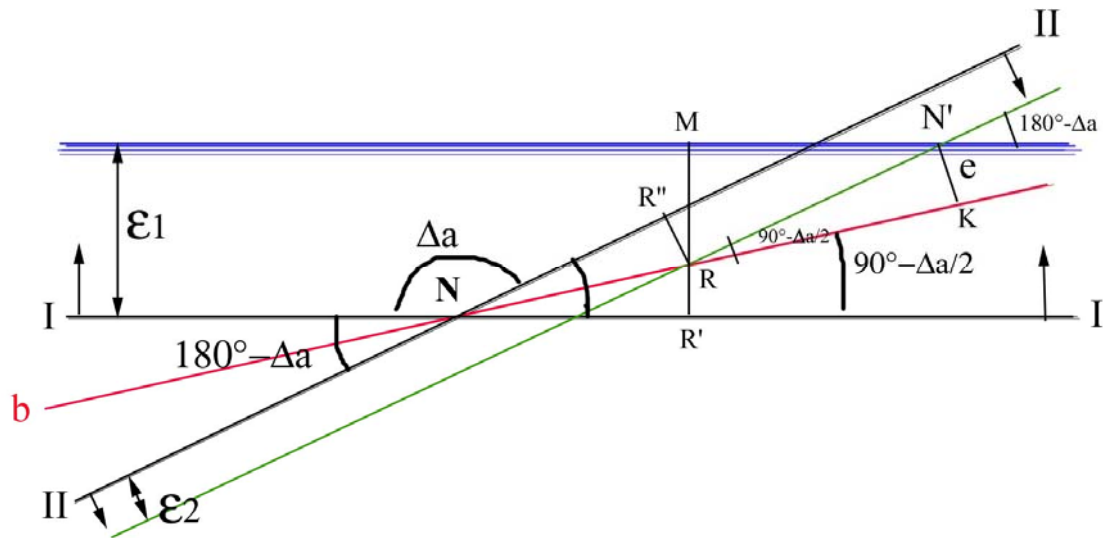
$$e = RN' \cos(\Delta a/2)$$

essendo che  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

Il problema è a questo punto quello di calcolare RN'. Si possono però fare le seguenti considerazioni:

**CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA**

1)  $RR' = RR'' = \varepsilon_1$



2) L'angolo  $N' = 180^\circ - \Delta a$  in quanto opposto all'angolo corrispondente di  $180^\circ - \Delta a$

3) L'angolo  $R = 90^\circ - \Delta a/2$  in quanto corrispondente tra rette parallele

Si può concludere che:

$$RM = RN' \text{ sen}(180^\circ - \Delta a) = RN' \text{ sen}(\Delta a)$$

essendo che  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha$ .

Perciò:  $RN' = RM / \text{sen}(\Delta a)$

Si ha inoltre:  $RM = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

e, pertanto:  $e = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos(\Delta a/2) / \text{sen}(\Delta a/2)$

Dalle formule di bisezione si ha:  $\text{sen} \alpha = 2 \text{ sen}(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$

da cui si conclude:  $e = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos(\Delta a/2) / 2 \text{ sen}(\Delta a/2) \cos(\Delta a/2)$

$$\boxed{e = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / 2 \text{ sen}(\Delta a/2)}$$

Poiché non è ipotizzabile che le quattro rette si incrocino in un solo punto si introducono le bisettrici. Avendo quattro rette di altezza il punto nave si otterrà a partire dal punto in cui si incrociano due bisettrici. Si osservi che, con motivazioni analoghe a quelle che ci avevano spinto ad introdurre e a motivare l'uso dei cerchi capaci, anche in questo caso l'uso delle bisettrici ci aiuta in quanto le bisettrici sono esenti dall'errore sistematico.

La scelta delle rette su cui determinare graficamente la bisettrice è semplice; si scelgono le rette che “si guardano” fra loro.

**Errori sulle rette di altezza**

Si possono classificare come segue, con le motivazioni di seguito indicate.

1. Errori sull'altezza osservata

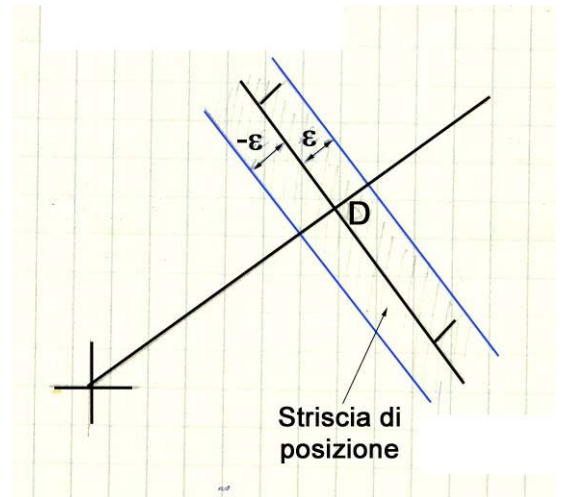
- a. Correzione strumentale (c) errata; è un errore minimo ed è di tipo accidentale.
- b. Errata correzione d'indice ( $\gamma$ ). Questo errore può essere grande, visto che l'errore d'indice è legato al parallelismo degli specchi del sestante. E' un errore di tipo sistematico.

**CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA**

- c. Errore dovuto alle condizioni meteo/marine ed è di tipo accidentale. Influenza il valore di  $\Delta h$ . Si pensi al caso in cui si effettua una osservazione controvento o sottovento: le due osservazioni non possono essere uguali.
- d. Errore dovuto all'osservatore ed è di tipo sistematico se le osservazioni sono effettuate da uno stesso osservatore. Di solito non è elevato: ogni osservatore è diverso ed è portato ad approssimare in modo diverso. L'errore diventa accidentale qualora le osservazioni degli astri siano effettuate da osservatori diversi.

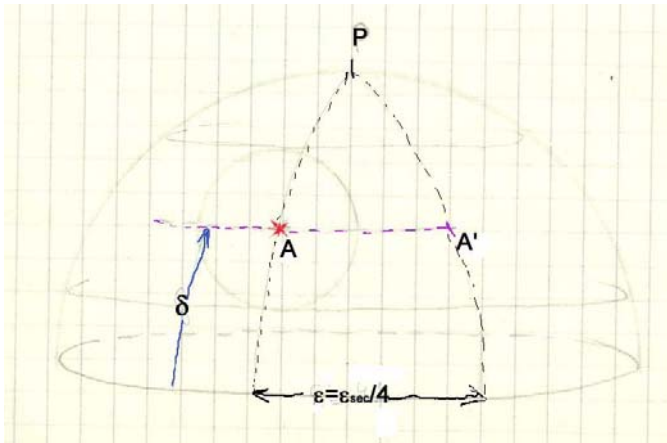
Anche questo errore influenza il valore della  $\Delta h$ .

Tutti gli errori sulle altezze osservate si traducono in un errore complessivo ( $\epsilon$ ) che è a sua volta determinato dal contributo di errori sistematici ( $\epsilon_s$ ) e di errori accidentali ( $\epsilon_a$ ). Questi errori influenzano, nel complesso il valore di  $\Delta h$ . Di conseguenza la retta di altezza non darà più luogo ad un luogo di posizione, ma ad una striscia di posizione tra la retta e l'errore ( $\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_a$ ).



**2. Errore del cronometro**

Sono possibili due tipi di errore: l'errore di lettura, dovuto all'osservatore, di tipo accidentale e l'errore sul  $k$  del cronometro, di tipo sistematico.

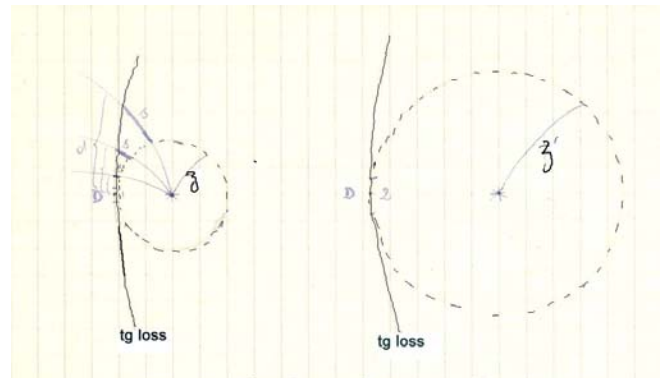


Entrambi comportano il fatto che il  $T_m$  risulterà inesatto, con tutte le conseguenze del caso a carico della declinazione e dell'angolo al polo. In particolare gli effetti saranno trascurabili per ciò che concerne la determinazione della declinazione. Questo perché, quale che sia il corpo celeste osservato, le variazioni nel tempo sono solitamente minime. Differente è il discorso legato alla determinazione dell'angolo al polo. Quest'ultimo, infatti, varia in continuazione.  $15^\circ$  di variazione all'ora,

implicano  $1^\circ$  ogni 4 minuti e  $1'$  ogni 4 secondi. In definitiva ogni 4 secondi di errore sul cronometro definiscono  $1'$  di errore nella determinazione dell'angolo al polo e, di conseguenza, la circonferenza di altezza si sposterà in longitudine determinando un errore in primi sull'equatore che si può stimare in  $\epsilon^{sec}/4$ . Il centro della circonferenza di altezza si sposterà di  $(\epsilon^{sec}/4)\cos\delta$ . Questo spostamento della circonferenza si trasmetterà sulla tangente lossodromica, determinando un errore. Tale errore sarà diverso a seconda della posizione della tangente secondo la relazione seguente:  $(\epsilon^{sec}/4)\cos\delta \sin Z$ . In definitiva l'errore sul cronometro è un errore accidentale perché dipende da  $Z$  e perché non tutti gli astri vengono osservati simultaneamente.

**3. Errore dovuto alla sostituzione della circonferenza di eguale altezza con la retta tangente ad essa**

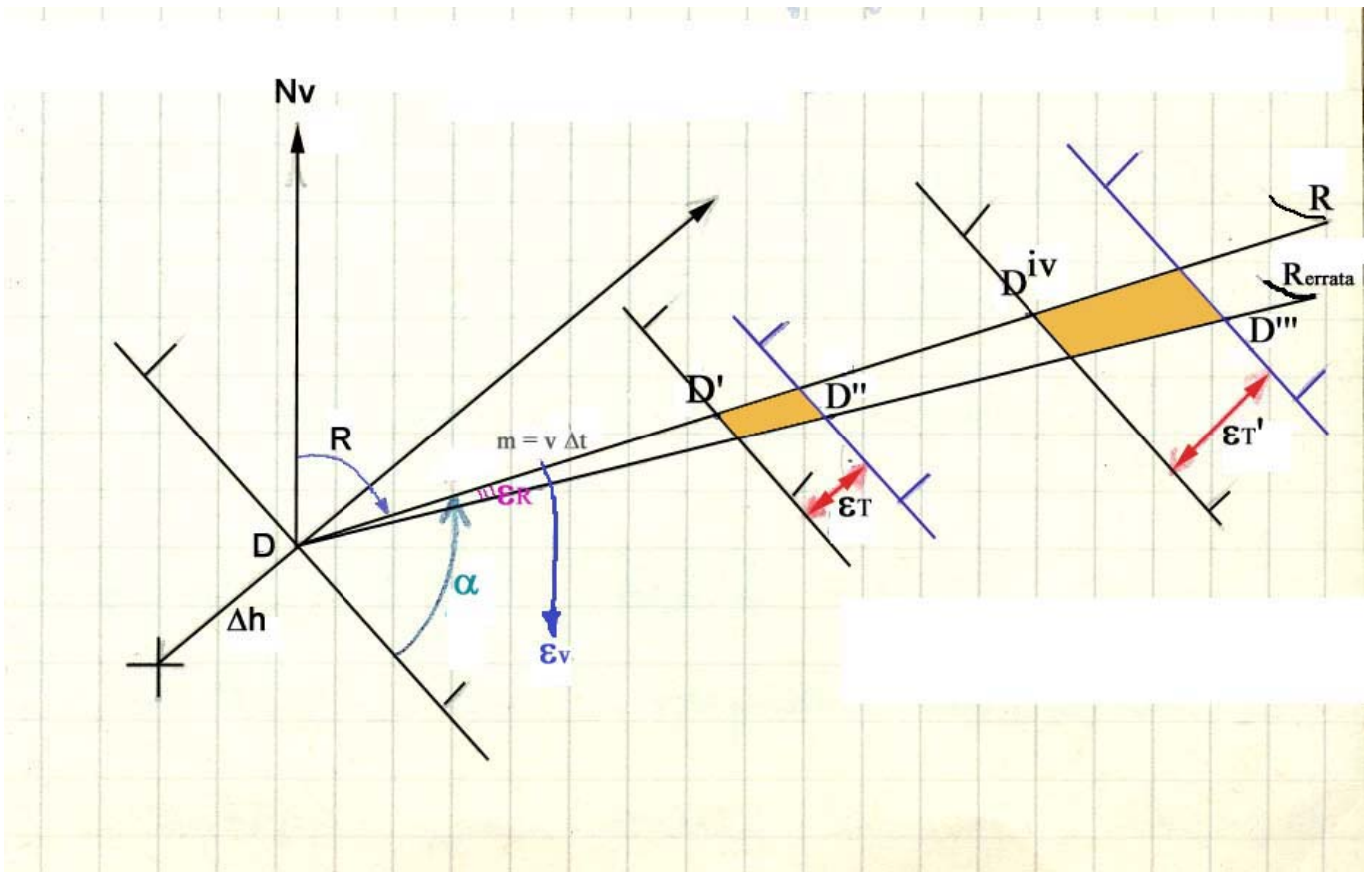
Questo errore è piccolo in funzione del valore della distanza zenitale e, conseguentemente, dell'altezza osservata. E' perciò opportuno che la distanza zenitale non sia troppo grande (quindi  $h$  non deve essere troppo piccola), per evitare le problematiche conseguenti alla rifrazione e l'ampliamento di questo errore.



**4. Errore dovuto al trasporto**

## CONSIDERAZIONI SULLE RETTE DI ALTEZZA

Questo errore deriva dal fatto che sia la velocità che la rotta non sono perfettamente noti e, pertanto, definiscono  $\varepsilon_v$  ed  $\varepsilon_R$ . L'azione combinata di questi errori portano ad una errata determinazione del punto determinativo. Si può dire che questo errore è funzione dell'intervallo di tempo e della direzione della rotta rispetto a Z. Anche questo errore è di tipo accidentale.



### Riferimenti Bibliografici

- Flora "Astronomia nautica" Ed. Hoepli, Milano
- Nicoli "Navigazione astronomica" Ed. del Bianco, Udine