CASI PARTICOLARI IN ASTRONOMIA NAUTICA

Stella di Nepero

Le formule di trigonometria sferica si semplificano notevolmente nel caso di triangoli sferici rettangoli; si ottengono così dieci formule ridotte che possono essere facilmente ricordate con la regola mnemonica di Nepero.

Si disegna una stella a cinque punte ed in ogni settore si scrivono consecutivamente tutti gli elementi del triangolo saltando l'angolo retto e sostituendo i cateti con i loro complementi (90°-b e 90°-c) nel triangolo rettangolo.

Nel triangolo rettilatero si procede effettuando il complemento agli angoli adiacenti (90°-A e 90°-B) al lato di lunghezza 90° ed il supplemento (180°-C) all'angolo opposto all'angolo di lunghezza pari a 90°. A questo punto si ha che risulta:

Il coseno di un elemento è uguale al prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti oppure è uguale al prodotto dei seni degli elementi opposti.

Nel trascrivere gli elementi nei vari settori non importa da quale si parte e dal verso (orario o antiorario). In Fig. 3 è riportato il caso dell'angolo retto in A, applicando la precedente regola al lato *a* si ottengono:

$$\cos a = \cot B \cot C$$

$$\cos a = \operatorname{sen}(90°-b)\operatorname{sen}(90°-c) = \cos b \cos c$$

Procedendo analogamente per gli altri quattro elementi si ottengono in totale le dieci formule già menzionate. Questi teoremi risultano particolarmente utili allorché l'astro si trova in posizioni particolari.

Analizzeremo i seguenti casi:

- Astro al 1° verticale
- Massima digressione
- Astro al primo orario
- Astro al sorgere
- Astro in meridiano
- Passaggio al meridiano mobile del sole
- Stella Polare
- Astro incognito

Questi ultimi due casi non rientrano nelle casistiche trattate dalla regola di Nepero.

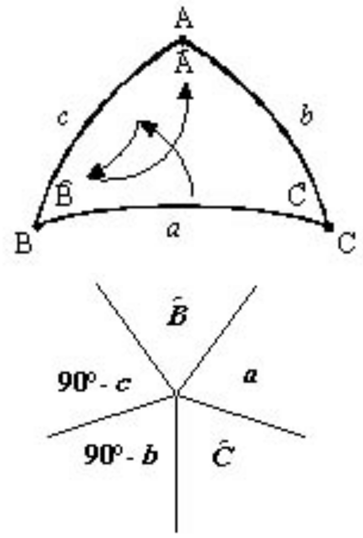

Fig. 1 Stella di Nepero.

Astro al 1° verticale

Questa situazione si realizza quanto l'angolo zenitale è retto (**Z = 90°**). Dalla regola di Nepero è possibile determinare l'angolo al polo (P) e l'altezza stimata dell'astro (h_S):

$$\boxed{\cos P = \cot\varphi \operatorname{tg}\delta}$$

L'analisi dei segni mi consente di osservare che:

- se φ è omonima alla δ allora cosP ≥ 0 e pertanto l'angolo al Polo si trova nel primo quadrante.

- se φ è eteronoma alla δ allora cosP < 0, essendo δ < 0 e pertanto l'angolo al Polo si trova nel secondo quadrante.

D'altro canto si sa che |cosP|≤1 e, quindi, risulta:

$$\operatorname{tg}\delta/\operatorname{tg}\varphi \le 1$$
$$|\operatorname{tg}\delta| \le |\operatorname{tg}\varphi|$$
$$\downarrow$$
$$|\delta| \le |\varphi|$$

La condizione affinché l'astro passi al primo verticale è che il valore assoluto della declinazione sia minore o uguale a quello della latitudine dell'osservatore.

Dalla stella di Nepero si ricava inoltre che:

$$\boxed{\operatorname{sen}h_S = \operatorname{sen}\delta \operatorname{cosec}\varphi}$$

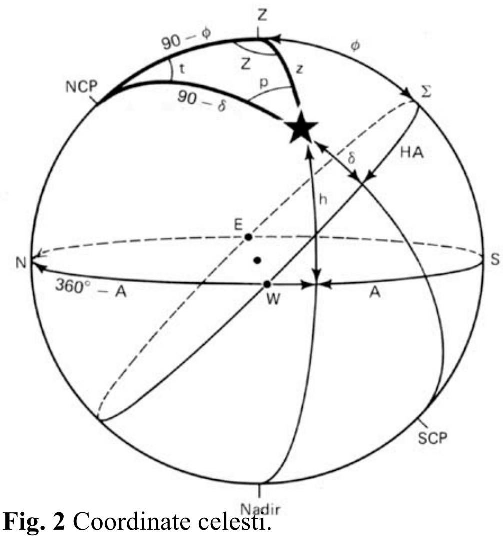

Fig. 2 Coordinate celesti.

In questo caso si ha che:

- se φ è omonima alla δ allora senh_S ≥ 0 e pertanto h_S si trova nel primo quadrante.
- se φ è eteronoma alla δ allora senh_S < 0 e pertanto h_S si trova nel secondo quadrante.

Anche in questo caso è possibile verificare che:

$$\operatorname{sen}h_S \le 0 \Rightarrow |\delta| \le |\varphi|$$

Se, infine risulta che se : φ = 0 allora si parla di <u>Sfera Retta</u> (S=Ps; N=Pn; Z=Ms; Z'=Mi).
δ = 0 l'astro si trova sull'equatore.

Si osservi che un astro che si trova su un qualsiasi parallelo di declinazione non passerà mai per il primo verticale.

Massima digressione

Questa situazione si realizza quando l'angolo all'astro è retto (**A=90°**). Applicando la regola |δ| ≤ |φ|, otteniamo che l'astro passa al primo verticale quando si troverà nella fascia di declinazioni comprese tra i paralleli di declinazione δ = φ e δ = -φ.

Tutti gli astri che si trovano al di fuori di questa fascia non passano mai per il primo verticale, ma l'angolo all'astro può essere retto.

In particolare si può assimilare il moro dell'astro ad un moto oscillatorio. La massima digressione corrisponde alla condizione in cui l'astro raggiunge il valore massimo dell'azimut. Con la regola di Nepero si ricava che:

$$\boxed{\cos P = \mathrm{tg}\varphi \ \mathrm{cotg}\delta}$$

La condizione cercata è che $|\delta| > |\varphi|$. Si può inoltre ricavare che

$$\boxed{\mathrm{sen}h_S = \mathrm{sen}\varphi \ \mathrm{cosec}\delta}$$

e, infine:

$$\boxed{\mathrm{sen}Z = \cos\delta \ \sec\varphi}$$

<u>Astro al 1° orario</u>

L'astro si trova al primo orario se l'angolo al Polo è retto (**P = 90°**). Agendo come al solito si ha che:

$$\boxed{\mathrm{sen}h_S = \mathrm{sen}\varphi \ \mathrm{sen}\delta}$$

La discussione sui segni porta alle seguenti considerazioni:

- se φ è omonima alla δ allora sen $h_S \geq 0$ e l'astro passa sopra l'orizzonte (h_S nel 1° quadrante).
- se φ è eteronoma alla δ allora sen $h_S < 0$ ed allora l'astro passa sotto l'orizzonte (h_S nel 2° quadrante).

$$\boxed{\mathrm{cotg}\ Z = \cos\varphi \ \mathrm{tg}\delta}$$

Dalla discussione sui segni:

- se φ è omonima alla δ allora Z giace nel 1° quadrante.
- se φ è eteronoma alla δ allora Z giace nel 2° quadrante.

Si può infine osservare che tutti gli astri passano per il primo orario.

<u>Astro al sorgere</u>

L'astro al sorgere presenta $h_S = 0$, ovvero il triangolo di posizione è rettilatero in quanto la distanza zenitale misura 90°. E' questo un caso abbastanza importante, anche se gli effetti dovuti ai fenomeni della rifrazione portano a degli errori di valutazione non trascurabili, nel senso, specie nel caso del Sole, che è possibile vedere l'astro, prima che esso sia realmente sorto.

Sfruttando ancora una volta la regola di Nepero, si ha che risulta:

$$\boxed{\cos P = -\ \mathrm{tg}\varphi \ \mathrm{tg}\delta}$$

la discussione sui segni permette di osservare che:

- se φ è omonima alla δ allora P giace nel 2° quadrante.
- se φ è eteronoma alla δ allora P giace nel 1° quadrante.

E' inoltre possibile osservare che:

$$|\cos P| \leq 1$$
$$|\mathrm{tg}\varphi \ \mathrm{tg}\delta| \leq 1$$
$$\mathrm{tg}\varphi \leq 1/\ \mathrm{tg}\delta = \mathrm{cotg}\delta = \mathrm{tg}(90° - |\delta|)$$
$$\varphi \leq 90° - |\delta|$$
$$\varphi + |\delta| \leq 90°$$

presupposto, quest'ultimo, che definisce la condizione affinché l'astro sorga, o meglio, almeno tocchi l'orizzonte.

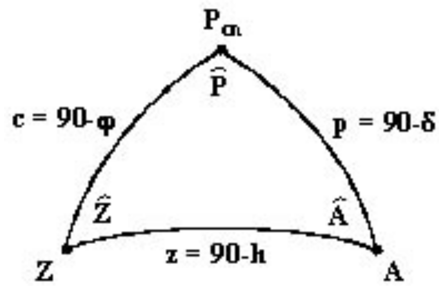

Fig. 3 Il triangolo di posizione.

E' poi possibile valutare l'angolo zenitale, per la determinazione dell'azimut, dalla:

$$\boxed{\cos Z = \mathrm{sen}\delta \ \sec\varphi}$$

in modo del tutto simile si ricava la relazione precedente: $\varphi + |\delta| \leq 90°$. La discussione sui segni permette di osservare che:

- se φ è omonima alla δ allora Z giace nel 1° quadrante.
- se φ è eteronoma alla δ allora Z giace nel 2° quadrante.

A titolo applicativo si può andare a verificare che se $\delta = 23°27'$, la condizione precedentemente introdotta ($\varphi + |\delta| \leq 90°$) porta a $\varphi_L = 66°33'$. Andiamo allora a vedere che cosa succede se: $\varphi > 66°33'$N

$\varphi < 66°33'$S

In sostanza se l'astro è il Sole, si ha che nel primo caso viene a trovarsi sempre sopra l'orizzonte, con conseguenti giornate di 24 ore, mentre nel secondo caso l'astro è sempre sotto l'orizzonte e, quindi, non sorge mai.

In definitiva se porto due paralleli di declinazione tangenti in N e S individuo nella sfera celeste tre fasce:

1. Astri sempre visibili (circumpolari)
2. Astri sorgenti e tramontanti
3. Astri sempre invisibili (anti circumpolari).

<u>Passaggio al meridiano di un astro</u>

Il passaggio al meridiano di un astro è quasi sempre riferito al passaggio al meridiano superiore ($t_* = 0° = 360°$ - si prende 0° se λ_W, 360° se λ_E) e corrisponde all'istante in cui ha "inizio il giorno" dell'astro considerato. Se ci si riferisce meridiano inferiore ($t_* = 180°$) si identifica la "metà del giorno" dell'astro. Va inoltre osservato il fatto che nell'istante del passaggio al meridiano superiore, l'astro raggiunge la massima culminazione (che corrisponde anche alla massima altezza che lo stesso può raggiungere in una certa località). L'istante in cui l'astro passa per il meridiano superiore, corrisponde anche al passeggio sul meridiano terrestre dell'osservatore. Da osservare che per il Sole, per ragioni civili, si fa iniziare il "giorno" nell'istante del passaggio al meridiano inferiore (la mezzanotte) anziché a quello superiore (il mezzogiorno).

La determinazione del passaggio al meridiano di un astro rappresenta pertanto un caso particolare di conversione dei tempi degli astri in tempi medi. Per la trattazione di questo caso è conveniente procedere con un esempio. Supponiamo perciò di volere determinare l'ora del passaggio di "Beltegeuse" in meridiano nella località situata in (45°N; 15°E) per il giorno 08.02.1983.

Dalle Effemeridi si ha che $co\alpha_* = 271° \, 26{,}2'$, mentre $\delta = 07°24{,}2'N$.
Essendo che:

$$t_* = ts + co\alpha_* \Rightarrow t_* - co\alpha_* = ts$$
$$t = T + \lambda \Rightarrow T = t - \lambda$$

si conclude che:

t_*	360°
$- co\alpha_*$	271° 26,2'
ts	088° 33,8'
$-\lambda$	15° E
Ts	073° 33,8'

A questo punto si rientra sulle Effemeridi e si scopre che (si faccia attenzione alla data di ingresso):

19	63°18,8'		
		73°33,8	$\Rightarrow$ **Ts – T's =** 73°33,8'-63°18,8' = 10°15,0' = **Is**
20	78°21,3		

entrando nelle "pagine azzurre" con il valore Is = 10°15,0', si ricava Im = $40^m \, 53^s$. In definitiva "Betelgeuse" passa in meridiano alle $19^h \, 40^m \, 53^s$ (Tm), in quanto:

$$T'_{mps*} + Im = T_{mps*}$$

A questo punto, volendo, è facile determinare che:

$$T_{mps*} + \lambda = t_{mps*}$$

Visto che l'osservatore si trova in $\lambda = 15°E$, si può ricavare che nella posizione in cui si trova l'osservatore, l'astro passerà in meridiano alle ore $20^h \, 40^m \, 53^s$.

Il passaggio al meridiano inferiore è analogo, ma si parte da $t_* = 180°$.

L'astro in meridiano ha da sempre rivestito una certa importanza in quanto in questa situazione la mole di calcoli da effettuare per risalire alla determinazione dell'altezza stimata e dell'azimut, si semplifica notevolmente.

In particolare si ha che risulta che la distanza zenitale (ζ), da cui si ricava l'altezza stimata, è legata alla latitudine dell'osservatore ed alla declinazione dell'astro dalle relazioni, qualora l'astro si trovi in meridiano superiore:

$$\boldsymbol{\zeta = \varphi - \delta}$$
$$\boldsymbol{\zeta = \varphi + \delta}$$
$$\boldsymbol{\zeta = \delta - \varphi}$$

e, nel caso del meridiano inferiore:

$$\boldsymbol{\zeta = 180° - (\varphi + \delta)}$$

Nel nostro caso si ha che:

φ	45°00,0'N
$-\delta$	07°24,2'N
ζ	37° 35,8'
$\downarrow$	
h	52°24,2'

L'azimut risulta infine essere pari a 180° (può essere utile fare un disegno della situazione).

<u>Passaggio al meridiano della Luna</u>

L'istante del passaggio al meridiano superiore della Luna si determina a partire dalla relazione:

$$t_{mps☾} = T_{mps☾} - (R/24)\lambda^h$$

Il valore di R è fornito dalle Effemeridi ed è ottenuto come la differenza tra i passaggi al meridiano per un dato giorno con quello del giorno precedente (se λ_E) o seguente (se λ_W).

Analoga è la relazione che consente la determinazione del passaggio al meridiano inferiore:

$$t_{mpi☾} = t_{mps☾} + 12^h + (R/2) \qquad [(R/24)\ 12^h = R/2]$$

Ci si ricordi infine che l'eventuale correzione al fuso proprio è data da:

λ_f	E/W
$-\lambda$	E/W
c_f	

ed è da sommare (algebricamente) al $t_{mps☾}$ trovato.

CASI PARTICOLARI IN ASTRONOMIA NAUTICA

Passaggio al meridiano dei Pianeti

Nel caso dei pianeti ho due formule, in quanto, a differenza della Luna, che ritarda rispetto al Sole, questi ultimi talvolta ritardano (R/24) e talvolta avanzano (A/24). In particolare, i pianeti inferiori possono sia ritardare che avanzare, mentre i pianeti superiori avanzano sempre.

L'avanzo va portato con segno contrario rispetto al ritardo.

Per capire se c'è avanzo o ritardo, basta confrontare il $T_{mps}\bullet$ tra due giorni successivi. Se dal confronto emerge che il $T_{mps}\bullet$ relativo al secondo giorno è maggiore, allora vi è ritardo e si opera come per la Luna. Altrimenti vi è avanzo.

Le relazioni sono:

$$t_{mps}\bullet = T_{mps}\bullet - (R/24)\,\lambda^h \qquad\qquad t_{mps}\bullet = T_{mps}\bullet - (A/24)\,\lambda^h$$

$$t_{mpi}\bullet = t_{mps}\bullet + 12^h + (R/2) \qquad\qquad t_{mpi}\bullet = t_{mpi}\bullet + 12^h - (A/2)$$

Passaggio al meridiano del Sole

Per il passaggio al meridiano del Sole si procede in maniera analoga, con la differenza che l'ingresso nella Effemeridi va fatto nella colonna Sole e non in quella dei tempi siderei.

La procedura è in ogni caso la stessa. Per il passaggio al meridiano superiore si ha che:

$$Tv = tv - \lambda \qquad (tv = 0° \text{ se } \lambda_W,\ 360° \text{ se } \lambda_E)$$

$$\begin{array}{r|l} Tv & \\ -T'v & \rightarrow T'm \\ \hline Iv & \rightarrow Im \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{r|l} T'm & \\ +Im & \\ \hline Tm & \\ +\lambda & \\ \hline t_{mps_\odot} & \end{array}$$

La relazione per la determinazione del $t_{mpi_\odot}$ è analoga, ma si parte con tv = 180°.

Volendo si può procedere con il "ritardo" (R) o "avanzamento" (A), analogamente a quanto visto per i pianeti. In tal caso si avrà che:

$$t_{mps_\odot} + 12^h \begin{array}{l} + (R/2) \\ - (A/2) \end{array}$$

R ed A vanno presi tra il giorno corrente e quello seguente.

In particolare, si considera R se tra due giorni consecutivi è maggiore quello relativo al secondo giorno; altrimenti si considera A.

Passaggio al meridiano mobile del Sole

Per determinare il punto nave a mezzogiorno di bordo dobbiamo determinare l'istante in cui il Sole passa per il meridiano della nave.

Poiché la nave si muove con velocità v, questo meridiano sarà "mobile", cioè si sposterà solidalmente con la nave.

E' pertanto indispensabile conoscere la velocità della nave rispetto all'equatore.

La situazione è, grossomodo, quella rappresentata in figura 4.

Poiché la Terra compie il suo moto diurno in 24 ore, possiamo ammettere che il Sole si muova sull'equatore ad una velocità pari a 900' all'ora.

Dalla scomposizione della velocità della nave, che si muove mantenendo una rotta R, risulta:

$$v_1 = v \cos R$$
$$v_2 = v \,\text{sen} R$$

Ne segue che la velocità della nave all'equatore corrisponderà a:

$$v_{eqt} = v_2/\cos\varphi_s$$

D'altra parte risulta pure che la distanza misurata sull'equatore tra meridiano mobile e Sole esprime l'angolo al Polo del Sole (P_E) e, quindi, l'intervallo di tempo cercato.

In particolare si può ricavare che:

Δt^h = cammino/velocità relativa

$$\Delta t^h = P_E\,'/[900 + (v\,\text{sen}R/\cos\varphi_s)]$$

$$\Delta t^h = (P_E\,'/900)\,[1/(1+(v\,\text{sen}R/900\cos\varphi_s))]$$

$$\Delta t^h = P_E^{\,h}/[1 + (v\,\text{sen}R/900\cos\varphi_s)]$$

$$\boldsymbol{\Delta t^h = P_E^{\,h}/[1 + \omega]}$$

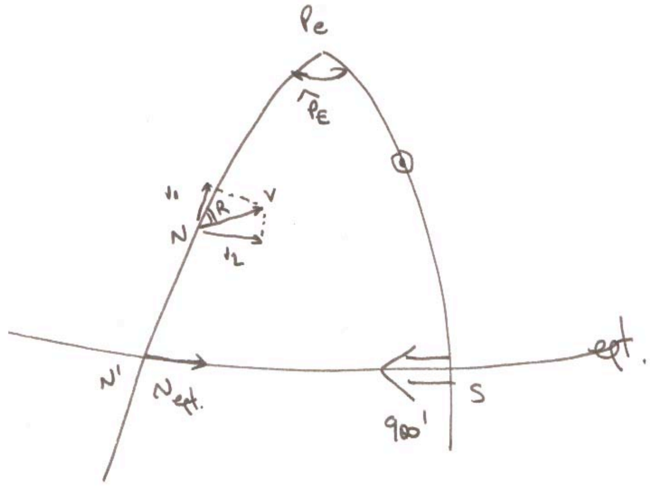

Fig. 4 Passaggio al meridiano mobile della nave.

Per procedere è stata usata l'approssimazione che vuole $1/(1+x) \approx 1 - x$.

Dalla discussione sui segni, emerge infine che ω è positivo se R giace nel 1° o nel 2° quadrante, mentre è negativo se R giace nel 3° oppure nel 4° quadrante. In sostanza ω è positivo se Sole e nave si vengono incontro, negativo nell'altro caso.

Stella Polare

L'osservazione della polare consente di determinare, attraverso opportune correzioni, per mezzo della Effemeridi, la latitudine dell'osservatore (φ_D).

In sostanza si tratta di apportare delle correzioni all'altezza vera della Polare per ottenere la latitudine.

$\mathbf{h_{vP*}}$	*(altezza vera)*
$\mathbf{c_1}$	*(pagine azzurre Effemeridi, ts)*
$\mathbf{c_2}$	*(pagine azzurre Effemeridi, ts, hv)*
$\mathbf{c_3}$	*(pagine azzurre Effemeridi, ts, mese)*
-1°	
$\boldsymbol{\varphi_D}$	

Tavole ABC

Le tavole ABC consentono attraverso tre ingressi ed una somma algebrica di calcolare il valore dell'angolo zenitale dal quale è poi possibile andare a calcolare l'azimut. Rappresentano un'applicazione della formula delle cotangenti.

A (φ, P)	(A è positivo se φ è omonimo a δ)
B (δ, P)	(B è positivo se P>90°)
C (φ, Z)	

↓

Z (quadrantale, con segni di φ e di P)

↓

a

Astro incognito

Osservare un astro incognito è una situazione che si verifica quando le condizioni meteorologiche non sono sufficientemente buone da consentire una piena visibilità del cielo. Nella necessità di effettuare un'osservazione si osserva quel che si può. Solitamente, quando si osserva un astro incognito, si cerca di ricavare il maggior numero di informazioni sull'astro considerato. Di solito si misura l'azimut dell'astro con l'apparecchio azimutale, a partire dal quale si determina l'angolo azimutale.

Per identificare un astro è necessario conoscere due parametri che mi permettono l'operazione: $co\alpha_*$ e δ*.

Il sistema più semplice è quello di utilizzare le tavole ABC introdotte precedentemente. Si tratta però, nel considerare il triangolo di posizione, di applicare la formula delle cotangenti all'angolo al Polo, che in questo caso rappresenta la mia incognita.

Si ha pertanto che:

A (φ, Z)	(A è positivo se Z > 90°)	Z SEMICIRCOLARE!
B (h, Z)	(B è sempre positivo)	
C (φ, P)	(se C>0 si prende il valore della tavola, altrimenti si prende 180°- valore tabulare)	
↓		
P	(Segno = 2° nome di Z)	
↓		
t_*		

A questo punto, ricordandoci che t = T + λ si determina facilmente il valore di T_* e, a questo punto:

T_*	
- Ts	
$co\alpha_*$	

Il problema sarebbe risolto, ma il fatto che ci possono essere più astri con valori di $co\alpha_*$ simili, mi inducono a ricavare anche la δ, per eliminare questa ambiguità. Ricordiamo, infatti, che il calcolo è viziato da una non necessariamente precisa misura dell'azimut oltre che da una conoscenza approssimativa della propria posizione. Anche in questo caso si utilizzano le tavole ABC.

In questo caso le ACB si usano nella forma tradizionale, cioè sfruttando il teorema delle cotangenti applicato a Z, ma andando a determinare l'elemento incognito (la δ):

C (φ, Z)	(C è positivo se Z < 90°)	Z QUADRANTALE!
- A (φ, P)	(B è positivo se P>90°)	
B (δ, P)	(se è positivo φ è omonima alla δ, altrimenti φ e δ hanno segni discordi)	
↓		
δ		

In sostanza: si entra nella tavola C con la latitudine stimata (φ) e ci si sposta orizzontalmente fino a trovare il valore di Z. Nella riga corrispondente vado a trovare C (si osservi che se Z < 90° entro con Z, altrimenti entro con 180°-Z).

Successivamente entro in maniera tradizionale nella tavola A. Eseguo a questo punto l'operazione algebrica (C-A=B). Entro con P e scendo a leggere il valore trovato di B. A fianco trovo δ. Si noti che se il risultato dell'operazione è positivo, ciò significa che φ e δ hanno lo stesso segno altrimenti significa che φ e δ hanno segni diversi.

A partire dai valori di $co\alpha_*$ e di δ sono finalmente in grado di riconoscere l'astro.

La spiegazione ora introdotta è riferita alla Nories Nautical Tables. Qualora si facesse uso della Tavole Nautiche, è sufficiente invertire A con B.

Si noti inoltre che allo stesso risultato si può giungere senza ricorrere alle tavole ABC, ma applicando direttamente le formule di trigonometria sferica e quelle dei tempi. Si ha infatti che:

$$\operatorname{sen}h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(P) \rightarrow \operatorname{sen}h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(T+\lambda)$$

inoltre:

$$\cos Z = (\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}h)/(\cos\varphi \cos h)$$

dove $a = Z$ se $\operatorname{sen}(T+\lambda) < 0$; $a= 360-Z$ se $\operatorname{sen}(T+\lambda) \geq 0$.
Inoltre:

$$\operatorname{sen}\delta= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}h + \cos\varphi \cos h \cos a$$

e, poi:

$$\cos P = (\operatorname{sen}h - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta)/(\cos\varphi \cos\delta)$$

e, questa volta $t = P$ se $\operatorname{sen}a < 0$; $t = 360° - P$ se $\operatorname{sen}a \geq 0$. Ne segue, infine, che:

Ts	
$+\lambda$	
ts	
$- t_*$	
$co\alpha_*$	

Riferimenti Bibliografici

- Di Franco "Manuale di Navigazione Astronomica Semplificata" Ed Mursia
- Flora "Astronomia Nautica" Ed. Hoepli
- Istituto Idrografico della Marina "Effemeridi Nautiche 1998"
- Istituto Idrografico della Marina "Manuale dell'Ufficiale di Rotta"
- Nicoli "Navigazione Astronomica" Ed. Del Bianco
- web.tiscali.it_cosmoweb_orientamento.html
- www.geocities.com_CapeCanaveral_Lab_2166_gakdsp1.htm
- www.math.nus.edu.sg\Heavenly Mathematics Highlights of Cultural Astronomy.htm
- www.nauticoartiglio.lu.it